

# *Un modèle théorique pour évaluer les performances d'un modèle simplifié des optimisations du lancer de rayon*

---

### **Mots clés**

Modélisation, analyse de performance , statistiques

### **Résumé**

*Ce chapitre présente un premier modèle mathématique qui permet de prévoir la complexité d'une version simplifiée de notre algorithme de lancer de rayon lors des calculs d'une scène aléatoire ou réelle. Les applications possibles concernent le choix du nombre optimum de processus pour une scène donnée.*

### **Summary**

*In this chapter, mathematical developments are exposed. They are able to predict complexity of our ray-tracer (in a simplified release) for calculations of a randomized model. This theory can be useful for the better choice of the number of processes for a given model.*

### **Introduction**

L'efficacité d'une méthode de lancer de rayon est très difficile à estimer a priori. La seule donnée dont on semble disposer est la complexité théorique mais la réalité des calculs est souvent très éloignée de cette donnée. Des approches plus fines ont été tentées. Dans [GS87] Goldsmith et al. ont essayé d'évaluer les performances d'une hiérarchie de boîtes englobantes en utilisant les statistiques : si l'on considère la probabilité conditionnelle qu'un rayon  $r$  tiré aléatoirement et de façon équiprobable touche un objet  $B$  englobé par un autre objet  $A$  déjà touché par  $r$  (noté

$P(r \text{ touche } B \mid r \text{ touche } A)$ ), et si A et B sont convexes, alors cette probabilité est égale au rapport des surfaces :  $P(r \text{ touche } B \mid r \text{ touche } A) = \frac{S(B)}{S(A)}$ . Une telle approche permet certes d'estimer le coût probable d'une optimisation (et éventuellement de renoncer à la faire), mais ne permet pas a priori de connaître le comportement de l'algorithme.

À partir des définitions que nous avons données aux chapitres V et VI, nous allons construire un modèle statistique adapté à notre approche de distribution des calculs qui permet de prédire un certain nombre de propriétés ainsi que le comportement de notre algorithme de lancer de rayon. Une telle démarche donnant certaines mesures de la complexité de l'algorithme, nous semble importante car elle permet d'évaluer des performances sans avoir recours à l'implantation machine. Les formules obtenues dans le modèle dépendent des paramètres caractéristiques de notre lancer de rayon : nombre de processus, topologies de ceux-ci, taille de l'écran, ... L'optimisation de ces formules théoriques (recherche de minimum ou de maximum), conduit à la détermination des valeurs optimales des différents paramètres et ceci grâce à l'utilisation dans le cadre de l'infographie, d'outils mathématiques tels que les statistiques d'ordre ou le calcul des variations qui trouvent là un nouveau champ d'application.

## **I) Évaluation statistique des optimisations des rayons primaires en topologie bande**

### **I.1) Hypothèses**

Les optimisations utilisées sont directement liées à une partition de l'écran en zones convexes. Plusieurs partitions sont réalisables et deux ont été effectivement implantées (Cf. Figure VII-1).

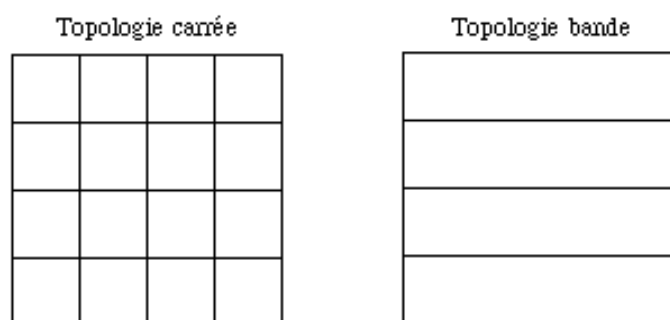


Figure VII-1

La topologie bande est un cas simplifié de la topologie carrée décrite au chapitre IV :

- on effectue les calculs ligne par ligne, de bas en haut,
- les messages émis sont un sous-ensemble de ceux de la topologie carrée : messages vers le Nord, le Sud.

Hypothèse 1. On considère une scène close (chaque rayon touche au moins un objet).

Conséquence.  $P_u = P_l$ , donc seul le nombre de calculs d'intersections primaires  $I_p$  nous intéresse, et nous pourrions en déduire le pourcentage d'objets non testés  $\eta_p$  par rapport à l'algorithme de base.

Hypothèse 2. La partition de l'écran est réalisée selon une topologie bande.

Hypothèse 3. Le temps de calcul des premières lignes de pixels de chaque bande est considéré comme négligeable par rapport au temps de calcul total des pixels de la bande.

Remarque. Plus le nombre de bandes sera grand et moins cette hypothèse sera pertinente dans le sens où l'on risque alors de surestimer les gains.

Hypothèse 4. À l'issue des calculs des premières lignes, les messages Nord et Sud sont envoyés simultanément par tous les processus. Le temps de transmission des messages à l'issue du calcul d'une première ligne d'une bande est considérée comme instantané.

Remarque. Cette hypothèse est classique et pertinente si l'on n'a pas trop d'objets et de bandes et dans le cas du parallélisme vrai, si le réseau de communication est efficace.

Hypothèse 5. Les objets de la scène sont quelconques.

Remarque. Les objets dont les primitives sont effectivement implantées dans notre logiciel sont les facettes triangulaires, les pavés, les ellipsoïdes, les cylindres, cônes et paraboloides à base elliptiques.

## **I.2) Modèle théorique d'une scène pour les rayons primaires de la topologie bande**

On considère une partition de l'écran (modélisée par le carré  $[0..1] \times [0..1]$ ) en  $k$  bandes de même hauteur  $1/k$ .

Remarque. Du point de vue des messages effectivement créés, un **objet** pour le modèle théorique est équivalent à la donnée de son **ordonnée maximale et son ordonnée minimale** c'est-à-dire d'un point  $(x_1, y_1)$  tel que  $0 \leq x_1 \leq y_1 < 1$ .

Conséquence. Pour la création des messages, il suffit de connaître pour chaque objet, ses coordonnées max et min : un objet est donc modélisé par un couple d'entiers  $O=(x_1, y_1)$  avec  $x_1 \leq y_1$  (représentant ses coordonnées min et max Cf. Figure VII-2).

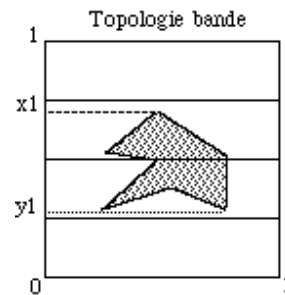


Figure VII-2

Définition. Une scène sera modélisée par la donnée d'une famille d'objets. L'espace sous-jacent associé est donc l'ensemble  $\Omega = \{(x,y) \mid [0..1]^2 / x \leq y\}$  qui est représenté dans la figure VII-3.

Se donner une scène, c'est-à-dire une famille d'objets, c'est choisir un échantillon  $(O_1, \dots, O_N)$  de  $N$  points de  $\Omega$ .

Cette scène sera caractérisée par la loi de probabilité  $P$  utilisée pour générer cet échantillon. On considérera souvent (mais pas obligatoirement)  $P$  définie par une densité  $f$  sur  $\Omega$  et on notera  $\mathcal{a}$  la tribu des événements sur  $\Omega$ . Le **modèle théorique d'une scène** est ainsi défini par le triplet :  $S = (\Omega, \mathcal{a}, P)$

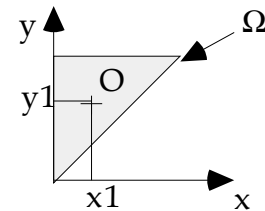


Figure VII-3

Définitions :

- Un objet  $O$  est un événement élémentaire de  $\Omega$ .
- $\mathcal{a}$  est la tribu des événements liés au phénomène aléatoire étudié (c'est-à-dire générer statistiquement une scène).
- $f$  est la densité de la loi de probabilité  $P$ , c'est-à-dire que si  $\chi$  est une partie (un événement) de  $\Omega$ , alors la probabilité  $P(\chi)$  de cet événement est :

$$P(\chi) = \int_{\chi} P(dx dy) = \int_{\chi} f(x, y) dx dy$$

Remarque importante. Étant donnée une scène réelle,  $P$  peut être déduite de l'observation de cette scène. Les résultats théoriques qui suivent prédisent alors le comportement de l'algorithme pour cette scène réelle. Ce type d'application sera réalisé au paragraphe II.6) pour la topologie carrée.

**I.3) Modèle de la topologie bande**

Définition : une bande située entre les lignes d'ordonnées  $x$  et  $y=x+h$  de la partition de l'écran est naturellement un point  $m(x, x+h)$  de  $\Omega$  (Cf. Figure VII-4). On notera de façon identique par  $m$  une bande et le point associé dans  $\Omega$ .

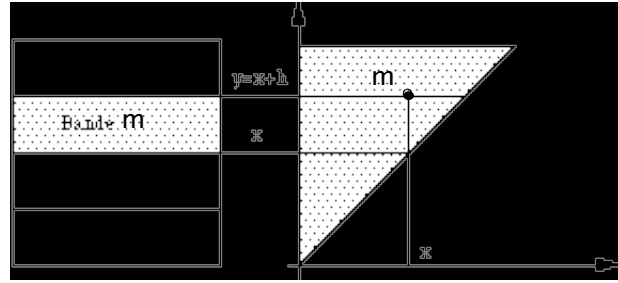


Figure VII-4

Définition : un ensemble cohérent de bandes (Cf. Figure VII-5) est un ensemble  $B = \{m_0, \dots, m_{k-1}\}$  de  $p$  points de  $\Omega$  tels que si  $m_i = (x_i, x_{i+1})$  alors  $m_{i+1} = (x_{i+1}, x_{i+2})$  et  $x_0=0, x_k=1$ .

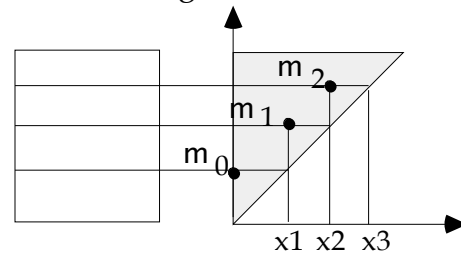


Figure VII-5

Hypothèse : on pourra choisir  $B$  tel que pour tout  $m_i$  de  $B$  on vérifie  $x_{i+1}-x_i=h$ ,  $h=1/k$  constante donnée.

Remarque. Le choix des bandes n'a a priori, pas de raison d'être régulier comme dans l'hypothèse précédente. Intuitivement, il serait souhaitable de mettre plus de bandes dans les parties de l'écran où il y a plus d'objets. On est ainsi amené à choisir les bandes (c'est-à-dire les réels  $x_0, x_1, x_{k-1}$  entre 0 et 1) selon une loi  $Q$  sur  $[0,1]$  qui à l'évidence est liée à la probabilité  $P$  sur  $\Omega$  caractérisant la répartition des objets dans la scène.

Le choix de  $P$  (choix d'une scène de  $N$  objets) et de  $Q$  (choix d'une topologie bande) conduit à un taux  $\eta_p = 1 - O_p / N$  du nombre d'objets économisés lors des tests d'intersection, taux que l'on peut déterminer explicitement par une formule  $\eta_p = F(P, Q)$ . Maximiser  $\eta_p$  pour une scène ( $P$ ) donnée revient à chercher la probabilité  $Q$  de choix des bandes qui maximise  $F$ . On aboutit ainsi à des problèmes concrets de calcul des variations.

Le choix d'un ensemble de bandes de tailles identiques est le choix qui est fait par défaut lorsque l'on ne dispose pas d'un outil d'optimisation permettant de le remettre en cause. Le choix de bandes selon une loi  $Q$  adaptée à la scène sera abordé au paragraphe III.

#### I.4) Modélisation et quantification des messages dans ce modèle

On considère un objet  $O=(x,y)$  de  $S$  et une bande  $m_i$  telle que  $m_i \in B$ , ensemble cohérent de bandes  $\{m_0, \dots, m_{k-1}\}$ . L'algorithme d'optimisation va générer deux types de messages pour  $O$  (Cf. Figure VII-6) : le message de suppression de cet objet envoyé vers le Nord, et le message de suppression de cet objet envoyé vers le Sud.

L'événement  $h_i$  "générer FINI objet  $O$  vers le Nord à partir de la bande  $m_i = (x_i, x_{i+1})$ " se formalise par :

**l'objet  $O=(x,y)$  est tel que  $x_i \leq y < x_{i+1}$ .**

L'événement "générer FINI objet  $O$  vers le Sud à partir de  $m_i$ " se formalise par :

**l'objet  $O=(x,y)$  est tel que  $x_i \leq x < x_{i+1}$**

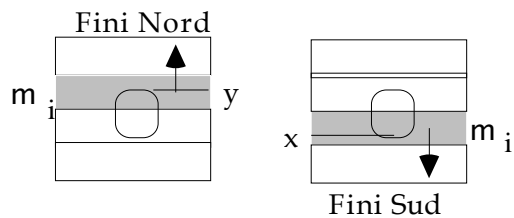


Figure VII-6

Donc ces événements sont modélisés par les parties de  $\Omega$  :

$$h_i = \{(x,y) \text{ de } \Omega / x_i \leq y < x_{i+1}\}$$

$$v_i = \{(x,y) \text{ de } \Omega / x_i \leq x < x_{i+1}\}$$

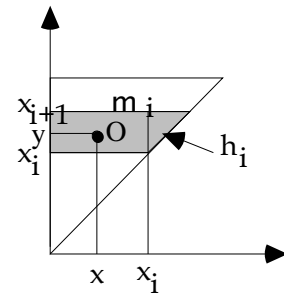


Figure VII-7

On en déduit que la probabilité d'envoyer un message vers le Nord (respectivement le Sud) à partir de  $m_i$  est :

$$P(h_i) = \iint_{h_i} P(dx dy) = \iint_{h_i} f(x, y) dx dy$$

$$\text{respectivement: } P(v_i) = \iint_{v_i} P(dx dy) = \iint_{v_i} f(x, y) dx dy$$

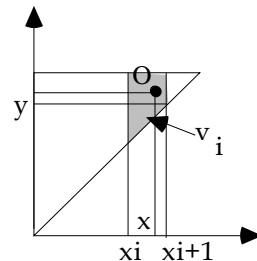


Figure VII-8

Si l'on suppose avoir généré une scène constituée de  $N$  objets,  $N$  supposé grand, générés de façon indépendante selon la loi  $P$ , la loi faible des grands nombres assure que l'on peut approximer la probabilité d'un événement par sa fréquence d'apparition dans l'échantillon généré. On en déduit que le nombre  $E_{n,i}$  de messages Nord (resp. Sud) générés par  $m_i$  est donné par la formule :

$$E_{n,i} \approx N \iint_{h_i} f(x, y) dx dy \quad \text{resp.} \quad E_{s,i} \approx N \iint_{v_i} f(x, y) dx dy$$

On en déduit le nombre de messages Nord (resp. Sud) reçus par la bande  $m_i$  :

$$R_{n,i} = \sum_{j=0}^{i-1} E_{n,j} \quad \text{resp.} \quad R_{s,i} = \sum_{j=i+1}^{k-1} E_{s,j}$$

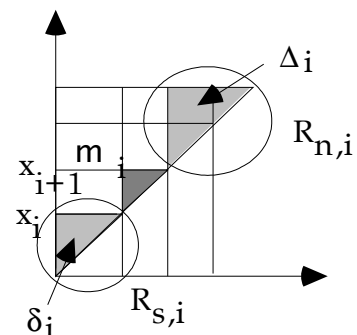


Figure VII-9

Remarque. Du nombre de messages reçus dépend directement l'optimisation du programme. En effet, sous l'hypothèse de non-redondance des messages de suppression des objets, chaque message reçu permet de tester un objet de moins par rayon à lancer.

On en déduit enfin le nombre d'objets restants dans la liste des objets primaires après la réception des messages : si  $T_i$  est le nombre d'objets qu'il reste à tester pour la bande  $m_i$ , on a :

$$T_i = N - R_{n,i} - R_{s,i} = N \left( 1 - \sum_{j=0}^{i-1} \iint_{h_j} f(x,y) dx dy - \sum_{j=i+1}^{k-1} \iint_{v_j} f(x,y) dx dy \right)$$

Si  $\delta_i$  et  $\Delta_i$  sont les aires définies sur la figure VII-9, on obtient finalement :

$$T_i = N \left( 1 - \iint_{\delta_i \cup \Delta_i} f(x,y) dx dy \right)$$

Notation. On notera  $Z_i = \delta_i + \Delta_i$  dans la suite.

### I.5) Applications

Remarque. On utilisera dans la suite l'hypothèse que la scène est fermée, ce qui est obtenu en générant un très grand nombre  $N$  d'objets (et en supposant la probabilité  $P$  de génération non nulle sur tout  $\Omega$ ). On peut éventuellement ajouter un objet couvrant tout l'écran, ce qui modifie très peu les statistiques si l'on suppose  $N$  grand.

#### I.5.a) Gain théorique

Notations. On considère un écran de résolution  $r_x * r_z$  avec une partition en un ensemble cohérent  $B = \{m_0, \dots, m_{k-1}\}$  de bandes. Les critères statistiques donnés dans le paragraphe précédent permettent d'évaluer le nombre de calcul d'intersections pour les rayons primaires ( $I_p$ ). Or  $I_p$  est un critère directement extractible du calcul d'une scène. On pourra comparer les résultats attendus théoriquement avec ceux explicitement donnés par le programme. Dans le programme, le calcul de  $I_p$  se décompose en deux phases :

a) calcul de la première ligne des bandes :  $N * r_x * k$ . Ceci représente le nombre d'intersections testées pour les rayons primaires lancés au travers des  $r_x$  pixels de la 1ère de chacune des  $k$  bandes (aucune optimisation n'étant réalisée lors du calcul des premières lignes,  $N$  objets étant testés par pixel).

b) calcul des lignes suivantes (optimisées par les messages qui sont arrivés) :

Ce qui nous donne la valeur théorique de  $I_p$  :

$$\begin{aligned} I_p &= r_x \left\{ N * k + \sum_{i=0}^{k-1} [(x_{i+1} - x_i) * r_z - 1] * T_i \right\} \\ &= r_x * N \left\{ k + \sum_{i=0}^{k-1} [(x_{i+1} - x_i) * r_z - 1] \left( 1 - \iint_{Z_i} f(x,y) dx dy \right) \right\} \\ &= r_x * N \left\{ r_z - \sum_{i=0}^{k-1} [(x_{i+1} - x_i) * r_z - 1] \iint_{Z_i} f(x,y) dx dy \right\} \end{aligned}$$

Comme la scène est supposée fermée (hypothèse 1 :  $P_1=r_x*r_z$ ), Cf. remarque ci-dessus , nous pouvons connaître le pourcentage d'objets testés par rayon primaire ( $O_p$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{O_p}{N} &= \frac{I_p}{N * P_1} = 1 - \frac{1}{r_z} \sum_{i=0}^{k-1} [(x_{i+1} - x_i) r_z - 1] \iint_{Z_i} f(x,y) dx dy \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \left[ (x_{i+1} - x_i) - \frac{1}{r_z} \right] \iint_{Z_i} f(x,y) dx dy \end{aligned}$$

Formule générale du gain dans le cas d'une topologie bande :

$$\eta_p = 1 - \frac{O_p}{N} = \sum_{i=0}^{k-1} \left[ (x_{i+1} - x_i) - \frac{1}{r_z} \right] \iint_{Z_i} f(x,y) dx dy$$

Cas particulier 1:  $\forall i : x_{i+1} - x_i = \frac{1}{k}$  et si l'on considère le pourcentage moyen d'objets que la méthode a réussi à éliminer de la liste des objets à tester pour un rayon primaire :

$$\eta_p = 1 - \frac{O_p}{N} = \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{r_y} \right) \sum_{i=0}^{k-1} \iint_{Z_i} f(x,y) dx dy$$

Formule du gain dans le cas d'une topologie bande régulière

Cas particulier 2:  $\forall i : x_{i+1} - x_i = \frac{1}{k}$

et  $f \equiv 2$

densité uniforme sur  $\Omega$ , de surface  $1/2$ .

La distribution des objets est dans ce cas uniforme sur l'espace.



$$\eta_p = 2 \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{r_y} \right) \sum_{i=0}^{k-1} S(Z_i)$$

Calcul de la surface des  $Z_i$  (Cf. Figure VII-10)

$$\begin{aligned} S(Z_i) &= \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{i}{k} \right)^2 + \left( \frac{i-1}{k} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2k^2} \left\{ (k-i)^2 + (i-1)^2 \right\} \end{aligned}$$

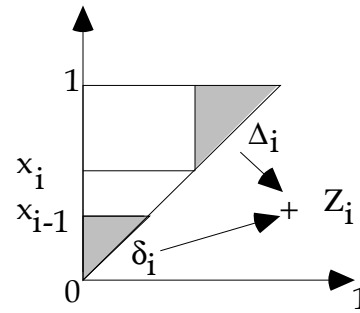


Figure VII-10

Nous en déduisons la somme des  $S(Z_i)$  pour les  $k$  bandes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} S(Z_i) &= \frac{1}{2k^2} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)^2 + \sum_{i=0}^{k-1} (i-1)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2k^2} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} i^2 + \sum_{i=0}^{k-1} i^2 \right\} = \frac{(k-1) \cdot (2k-1)}{6k} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc donner l'expression du nombre d'objets testés par rayon primaire  $O_p$ , ou plutôt le pourcentage  $\eta_p$  d'objets que la méthode a réussi à éliminer de la liste des objets à tester :

$$\eta_p = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{r_z} \right) \frac{(k-1)(2k-1)}{k}$$

### I.5.b) Comparaisons numériques

Les données expérimentales sont les suivantes :

- 1000 objets  $O(x,y)$  définis en tirant  $x$  et  $y$  aléatoirement dans  $[0..1]$  grâce à la fonction `drand48` du C ansi.

-  $r_z=r_x=1024$ .

- une topologie bande et un algorithme calculant les pixels de chaque bande ligne par ligne, de la ligne du bas à la ligne du haut.

- les calculs sur les bandes sont faits en parallélisme simulé sur une machine, en calculant une ligne de la bande  $i$ , puis une ligne de la bande  $i+1$ , etc... Les messages sont envoyés après le calcul de toutes les premières lignes et lus au début des lignes  $l$ ,  $l>1$  (pour se placer dans le cadre de l'hypothèse de parallélisme vrai alors que nous sommes en fait en parallélisme simulé).

La Figure VII-11 représente le pourcentage d'objets non testés (dédit de  $\eta_p$ ) en fonction du nombre de bandes de façon théorique et réelle, ainsi que la différence des deux courbes.

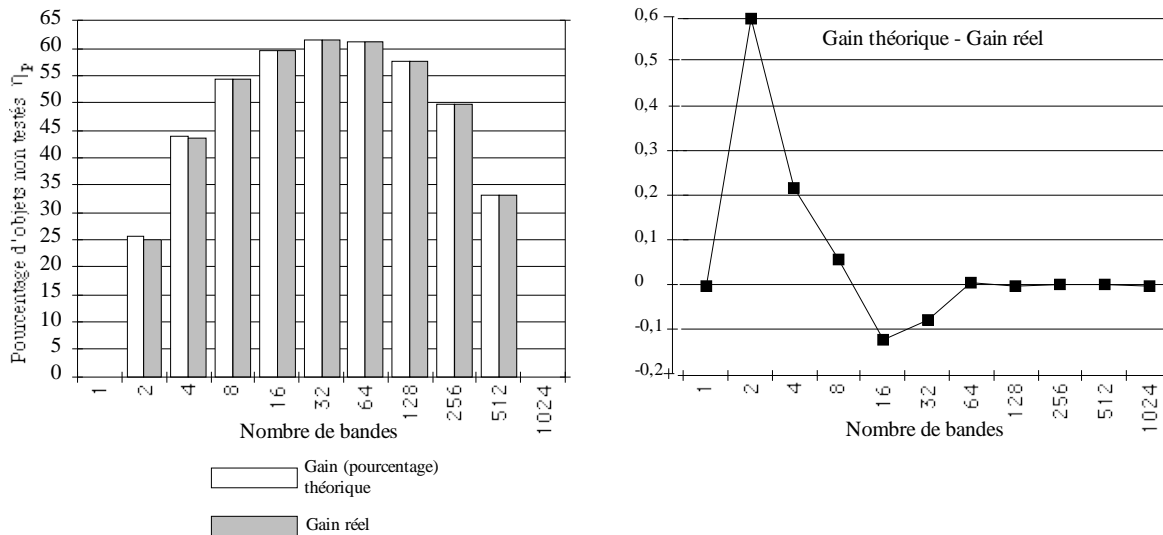


Figure VII-11 : Comparaison des gains théoriques et réels  
(densité de la scène uniforme sur  $\Omega$ )

Les courbes théoriques et pratiques concordent très bien puisque l'écart maximal enregistré est de 0,59%. Les écarts enregistrés sont probablement dus au fait que l'échantillon d'objets n'est pas parfaitement réparti puisque qu'il est issu d'une fonction C pseudo-aléatoire appliquée pour générer un échantillon de 1000 objets. Malgré cette restriction, les résultats obtenus valident l'approche statistique utilisée ainsi que les résultats théoriques concernant le gain espéré.

## II) Modèle statistique des optimisations des rayons primaires en topologie carrée

### II.1) Hypothèses

#### Figure VII-12

On considère une partition écran en  $n \times m$  carreaux (Cf. Figure VII-12).

### II.2) Modèle théorique d'une scène pour la topologie carrée

Remarque. Du point de vue des messages effectivement créés, un **objet** pour le modèle théorique

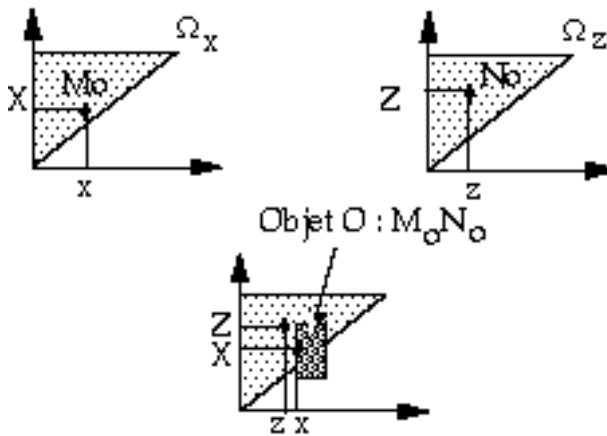


Figure VII-13 : description de l'objet O comme un rectangle englobant pour l'objet O équivalent à la donnée de ses ordonnées et abscisse maximales et minimales.

Conséquence. Pour la création des messages, il suffit de connaître pour chaque objet O les deux points  $(x_o, z_o)$  et  $(x_o, x_o)$ , représentant ses abscisses et ordonnées minimales et maximales. Une scène sera modélisée par un ensemble d'objets.

L'espace sous-jacent associé est donc l'ensemble  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_z$  qui peut être représenté selon la figure VII-13. Se donner une scène, c'est-à-dire une famille d'objets, c'est choisir un échantillon  $(O_1, \dots, O_N)$  de N couples de points de  $\Omega$ . Cette scène sera caractérisée par la loi de probabilité P utilisée pour générer cet échantillon. Le **modèle théorique d'une scène** est ainsi défini par le triplet :

$$S = (\Omega, a, P)$$

### II.3) Modèle de la topologie carrée

Définition. La topologie carrée est un ensemble de  $m \times k$  processus  $P_{ij}$  tels que  $0 \leq i \leq m-1$  et  $0 \leq j \leq k-1$  associés à une partition de l'écran en cellules  $C_{ij}$  telles que  $0 \leq i \leq m-1$  et  $0 \leq j \leq k-1$  (Cf. Figure VII-14). Dans la suite on prendra  $m=k$ .

Une cellule  $C_{ij}$  de la partition de l'écran associée à un processus  $P_{ij}$  est définie par ses deux points extrêmes  $N_{ij} = (\alpha_i, \alpha_{i+1})$  et  $N_{i+1,j+1} = (\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2})$  (Cf. Figure VII-14)

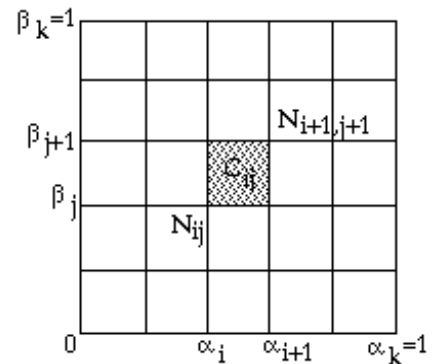


Figure VII-14

$C_{ij}$  est donc naturellement associée à un couple de points  $(A_i, B_j) = ((\alpha_i, \alpha_{i+1}), (\alpha_i, \alpha_{i+1}))$  de  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_z$ .

Définition. Un ensemble cohérent de cellules  $C_{ij}$  est donc défini par deux suites  $A = (A_0, \dots, A_i, \dots, A_{k-1})$  et  $B = (B_0, \dots, B_j, \dots, B_{k-1})$  de points appartenant respectivement à  $\Omega_x$  et  $\Omega_z$  tels que si  $A_i = (\alpha_i, \alpha_{i+1})$  (resp.  $B_j = (\beta_j, \beta_{j+1})$ ) alors  $A_{i+1} = (\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2})$  (resp.  $B_{j+1} = (\beta_{j+1}, \beta_{j+2})$ ), avec  $\alpha_0=0, \beta_0=0, \alpha_k=1, \beta_k=1$ .

Hypothèse. On pourra choisir la dimension des cellules et A et B tels que pour tout i,  $\alpha_{i+1}-\alpha_i= 1/k$  et  $\beta_{i+1}-\beta_i= 1/k$ .

Remarque. Le choix des cellules n'a a priori, pas de raison d'être régulier comme dans l'hypothèse précédente. Intuitivement, il serait souhaitable de mettre plus de cellules dans les parties de l'écran où il y a plus d'objets. On est ainsi amené à choisir les cellules selon une loi Q sur [0..1] qui à l'évidence est liée à la probabilité P sur  $\Omega_x \times \Omega_z$  caractérisant la répartition des objets dans la scène.

Le choix de P (choix d'une scène de N objets) et de Q (choix d'une topologie carrée) conduit à un taux  $\eta_p=1-O_p/N$  du nombre d'objets économisés lors des tests d'intersection, taux que l'on peut déterminer explicitement par une formule  $\eta_p=F(P,Q)$ . Maximiser  $\eta_p$  pour une scène (P) donnée revient à chercher la probabilité Q de choix des bandes qui maximise F. On aboutit ainsi à des problèmes concrets de calcul des variations pour la recherche de maximum.

Le choix d'un ensemble de cellules de tailles identiques est le choix qui est fait par défaut lorsque l'on ne dispose pas d'un outil d'optimisation permettant de le remettre en cause. Cet aspect détaillé dans le cas des bandes pourrait l'être de façon analogue pour le cas de la topologie carrée. Ce travail est en cours.

**II.4) Modélisation et quantification des messages dans ce modèle**

Un processus  $P_{ij}$  associé à  $C_{ij}$  partage l'écran en huit zones N, E, O, S, NO, NE, SO, SE (Cf. Figure VII-15). Chacune de ces zones est susceptible d'envoyer un message concernant un objet O et qui sera reçu par  $C_{ij}$ .

Par exemple, un objet sera à l'origine d'un message envoyé vers le sud (donc venant du nord pour  $C_{ij}$  qui le reçoit) si  $z > \beta_{j+1}$  et  $x < \alpha_{i+1}$  et  $X > \alpha_i$ .

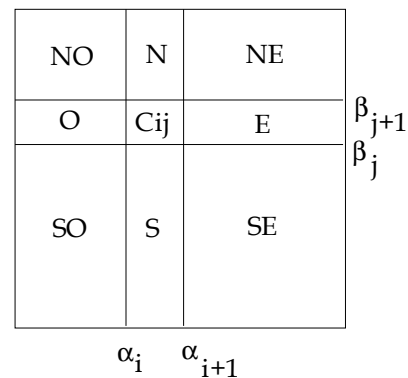


Figure VII-15

Ces inéquations définissent des zones sur  $\Omega_x$  et  $\Omega_z$ .

La figure VII-16 représente les différentes zones  $Z_i$  associées aux conditions d'émission des messages sur les huit zones de partage de l'écran. Nous en aurons besoin pour calculer le nombre de messages reçus par direction.

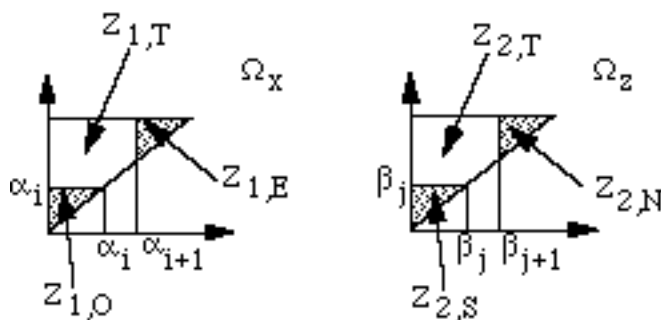


Figure VII-16

Dans ce contexte, les conditions simultanées  $z > \beta_{j+1}$  et  $x < \alpha_{i+1}$  et  $X > \alpha_i$  pour que l'objet O soient la cause de l'émission d'un message Fini vers le sud se traduisent pas (en notant  $M_O = (x, X)$  et  $N_O = (z, Z)$ , Cf. Figure VII-13) :

$$(M_O, N_O) \quad Z_{1,T} \times Z_{2,N}$$

De plus, si la probabilité de définition des objets est donnée par une densité  $f(x, X, z, Z)$ , alors le nombre de messages venant du Nord reçus par  $C_{ij}$  est :

$$M_N(i, j) \approx N \iint_{Z_{1,T} \times Z_{2,N}} \iint_{\Omega} f_{\Omega}(x, X, z, Z) dx dX dz dZ = N \cdot i_{1T,2N}$$

où N est le nombre d'objets de la scène.

De même le nombre de messages venant du Sud reçus par  $C_{ij}$  :

$$M_S(i, j) = N \iint_{Z_{1,T} \times Z_{2,S}} \iint_{\Omega} f_{\Omega}(x, X, z, Z) dx dX dz dZ = N \cdot i_{1T,2S}$$

Nombre de messages venant de l'Est reçus par  $C_{ij}$  :

$$M_E(i, j) = N \iint_{Z_{1,E} \times Z_{2,T}} \iint_{\Omega} f_{\Omega}(x, X, z, Z) dx dX dz dZ = N \cdot i_{1E,2T}$$

Nombre de messages venant de l'Ouest reçus par  $C_{ij}$  :

$$M_O(i, j) = N \iint_{Z_{1,O} \times Z_{2,T}} \iint_{\Omega} f_{\Omega}(x, X, z, Z) dx dX dz dZ = N \cdot i_{1O,2T}$$

Nombre de messages venant du NE reçus par  $C_{ij}$  :

$$M_{NE}(i, j) = N \iint_{Z_{1,E} \times Z_{2,N}} \iint_{\Omega} f_{\Omega}(x, X, z, Z) dx dX dz dZ = N \cdot i_{1E,2N}$$

Nombre de messages venant du NO reçus par  $C_{ij}$  :

$$M_{NO}(i, j) = N \iint_{Z_{1,O} \times Z_{2,N}} \iint_{\Omega} f_{\Omega}(x, X, z, Z) dx dX dz dZ = N \cdot i_{1O,2N}$$

Nombre de messages venant du SE reçus par  $C_{ij}$  :

$$M_{SE}(i, j) = N \iint_{Z_{1,E} \times Z_{2,S}} \iint_{\Omega} f_{\Omega}(x, X, z, Z) dx dX dz dZ = N \cdot i_{1E,2S}$$

Nombre de messages venant du SO reçus par  $C_{ij}$  :

$$M_{SO}(i, j) = N \iint_{Z_{1,O} \times Z_{2,S}} \iint_{\Omega} f_{\Omega}(x, X, z, Z) dx dX dz dZ = N \cdot i_{1O,2S}$$

On peut donc en déduire le nombre d'objets restant dans la liste des objets primaires de  $c_{ij}$  :

$$T_{ij} = N (1 - M_N - M_E - M_O - M_S - M_{NE} - M_{NO} - M_{SE} - M_{SO})$$

$$= N (1 - i_{2N,1T} - i_{2S,1T} - i_{2T,1E} - i_{2T,1O} - i_{2N,1E} - i_{2N,1O} - i_{2S,1O} - i_{2S,1E})$$

et comme :  $i_{2T} + i_{2N} + i_{2S} = i_{1T} + i_{1E} + i_{1O} = 1$ ,

$$T_{ij} = N \cdot i_{1T,2T}$$

**Remarque.** Dans le cas de l'indépendance du choix des objets O, alors  $f_{\Omega}(x,X,z,Z) = f_{\Omega_x}(x,X) \times f_{\Omega_z}(z,Z)$  et :

$$T_{ij} = N i_{1T} \cdot i_{2T} = N \iint_{Z_{1,T}} f_{\Omega_x}(x,X) dx dX \iint_{Z_{2,T}} f_{\Omega_z}(z,Z) dz dZ$$

## II.5) Applications

Comme pour le cas de la topologie bande, il est maintenant possible d'évaluer le nombre  $I_p$  de calculs d'intersections pour les rayons primaires, et nous en déduisons  $O_p$  le nombre moyen d'objets testés par rayon primaire puis le pourcentage moyen  $\eta_p$  d'objets non testés par rayon primaire.

Pour une partition en  $m \cdot k$  processus (Cf. Figure VII-14),  $I_p$  se décompose en deux parties :

- calcul des premières lignes/colonnes des  $C_{ij}$  :  $N(mr_x + kr_z - mk)$

(le terme  $-mk$  correspond aux pixels des coins comptés deux fois)

- calcul des lignes/colonnes suivantes qui nous donne :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left[ (\alpha_{i+1} - \alpha_i) r_x (\beta_{j+1} - \beta_j) r_z - (\alpha_{i+1} - \alpha_i) r_x - (\beta_{j+1} - \beta_j) r_z + 1 \right] T_{ij}$$

donc :

$$I_p = N \left( mr_x + kr_z - mk + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left[ (\alpha_{i+1} - \alpha_i) r_x (\beta_{j+1} - \beta_j) r_z - (\alpha_{i+1} - \alpha_i) r_x - (\beta_{j+1} - \beta_j) r_z + 1 \right] i_{1T,2T} \right)$$

$$\eta_p = 1 - \frac{O_p}{N} = 1 - \frac{I_p}{Nr_x r_z} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left( \alpha_{i+1} - \alpha_i - \frac{1}{r_x} \right) \left( \beta_{j+1} - \beta_j - \frac{1}{r_z} \right) (1 - i_{1T,2T})$$

Formule générale du gain en topologie carrée

Dans le cas particulier d'une partition carrée régulière (Cf. calculs complets en annexe de ce chapitre) :

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i = \beta_{j+1} - \beta_j = \frac{1}{k}, \quad n = m = k, \quad r_x = r_z = r$$

$$\eta_p = 1 - \frac{O_p}{N} = 1 - \frac{I_p}{Nr_x r_z} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{r}\right)^2 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} (1 - i_{IT,2T})$$

Formule des gains en topologie carrée régulière

II.5.a) Cas particulier 1 :  $f_\Omega = f_x f_z$ , avec  $f_x = f_z \equiv 2$

$$\begin{aligned} \frac{O_p}{N} &= \frac{2k}{r} - \frac{k^2}{r^2} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{r}\right)^2 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} (i_{IT,2T}) = \frac{2k}{r} - \frac{k^2}{r^2} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{r}\right)^2 \left(\sum_{i=0}^{k-1} i_{1T}\right)^2 \\ &= \frac{2k}{r} - \frac{k^2}{r^2} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{r}\right)^2 \left(\sum_{i=0}^{k-1} 1 - 2Z_{\text{bande}}(i)\right)^2 \end{aligned}$$

si  $Z_{\text{bande}}(i)$  est le  $Z(i)$  de la topologie bande (Cf. I.5.a).

Finalement :

$$\eta_p = \left(1 - \frac{k}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{r}\right)^2 \left(k - \frac{(k-1)(2k-1)}{3k}\right)^2$$

Nous avons procédé aux mêmes tests qu'avec la topologie bande, ce qui nous permet de valider le modèle (Cf. Figures VII-17), pour un écran constitué de  $r^2=1024^2$  pixels et 1000 objets.

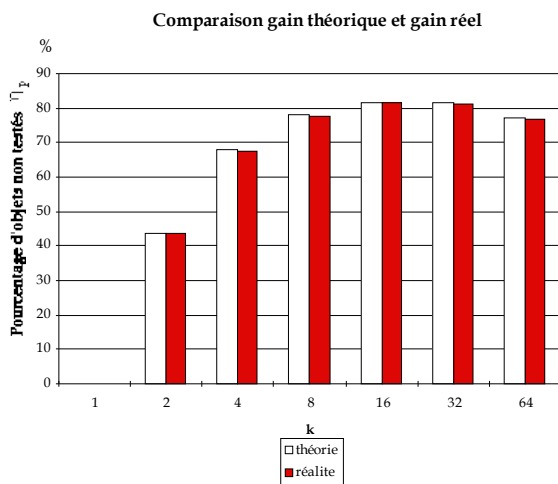


Figure VII-17a : comparaison théorie et réalité en topologie carrée (avec indépendance du tirage des objets :  $f_\Omega = f_x f_z$ , avec  $f_x = f_z \equiv 2$ )

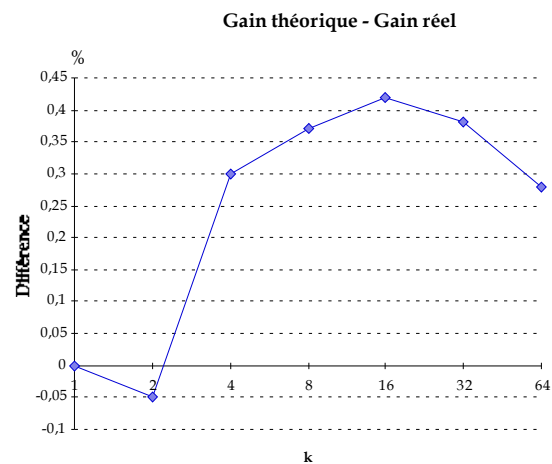


Figure VII-17b : courbe évaluant la différence entre théorie et réalité en topologie carrée

Comme pour la topologie bande, nous constatons que le modèle théorique est une très bonne estimation de la réalité (différence maximum de 0,42%, pour une scène à densité uniforme). Nos calculs s'arrêtent à  $k=64$  ( $k^*k=4096$  processus) pour des raisons de problème de taille de mémoire.

Il est maintenant possible de comparer théoriquement les performances des optimisations (pourcentage d'objets non testés suite aux optimisations) des topologies bandes et carrés (Cf. Figure VII-18) :

\* pour la topologie carrée :  $\eta_p = 1 - \frac{O_p}{N} = 1 - \frac{I_p}{Nr_x r_z} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{r}\right) \sum_{i=0}^{2k-1} \sum_{j=0}^{k-1} (1 - i_{IT,2T})$

(Cf. II.5)

\* pour la topologie bande :  $\eta_p = 1 - \frac{O_p}{N} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{r_y}\right) \sum_{i=0}^{k-1} \iint_{Z_i} f(x,y) dx dy$

(Cf. I.5)

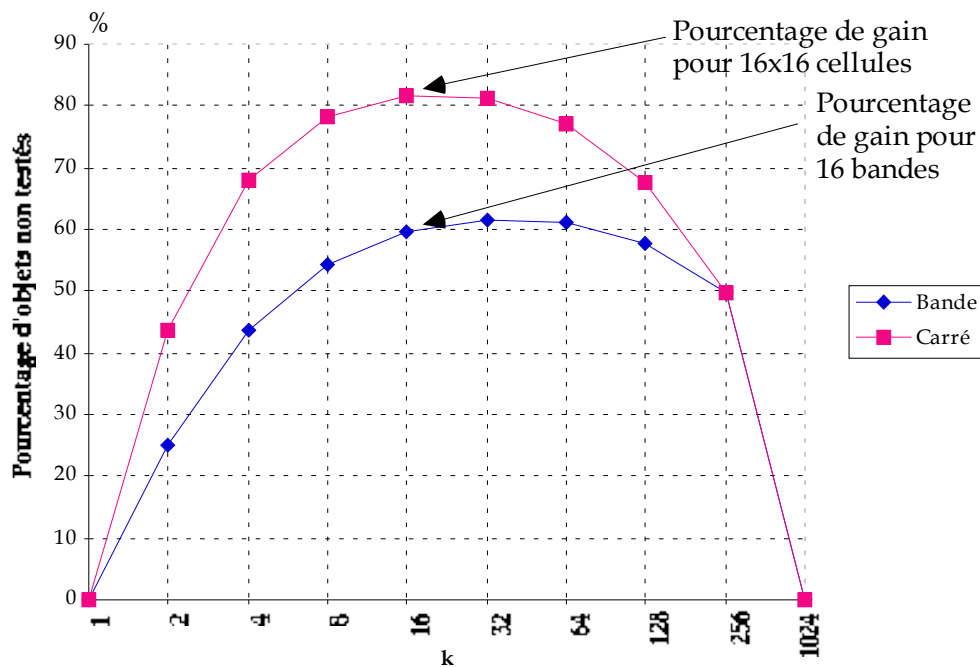


Figure VII-18 : comparaison des gains des topologies bande et carrée

On constate que la topologie carrée est nettement meilleure jusqu'à k=256 (256\*256 processus en topologie carrée) ; ensuite le coût de calculs des premières lignes/colonnes annule le gain de la topologie carrée.

Pouvoir faire une telle comparaison théorique est importante car l'implantation des méthodes est souvent longue. Par cette étude théorique, il est donc possible d'implanter et de tester uniquement les meilleures méthodes.



Enfin, on notera (toujours pour une scène à densité uniforme) que le gain est aussi dépendant de la résolution de l'écran (r). Cependant, on voit sur la figure VII-19, où l'on évalue le pourcentage d'objets non testés en fonction du nombre de processus (k\*k) et de la

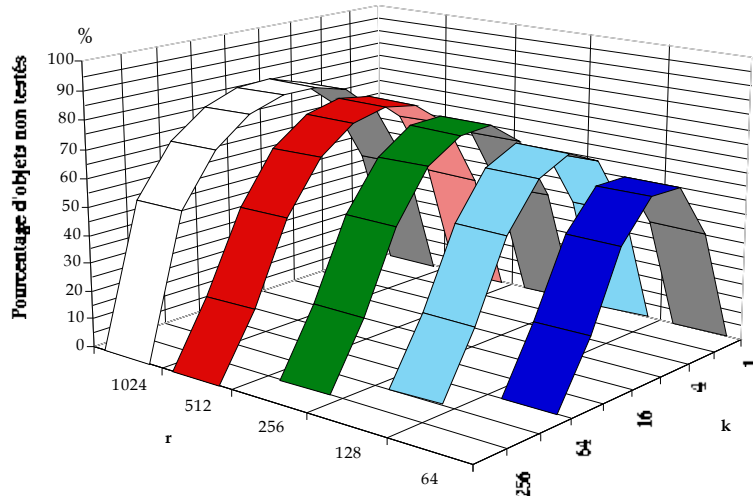


Figure VII-19 : influence de r et k en topologie carrée résolution de l'écran (r\*r), que la variation de r influe moins que celle de k et que plus la résolution de l'écran est grande, meilleure est notre méthode d'optimisation.

II.5.b) Cas particulier 2. Tirage de scène avec dépendance des dimensions des objets

Dans le cas particulier 1), nous avons étudié le modèle théorique sur une partition régulière et pour une scène dont les dimensions des objets étaient tirées de façon indépendante. Dans la situation d'un tirage aléatoire d'objets dont la largeur et la hauteur ne sont plus indépendantes et placés sur la diagonale de l'écran, la densité sera donnée par exemple par la fonction indicatrice sur  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_z : f = 24 * 1_{x < z < Z < X}$  (le coefficient 24 étant dû au fait que l'on intègre une densité sur  $\Omega$ ).

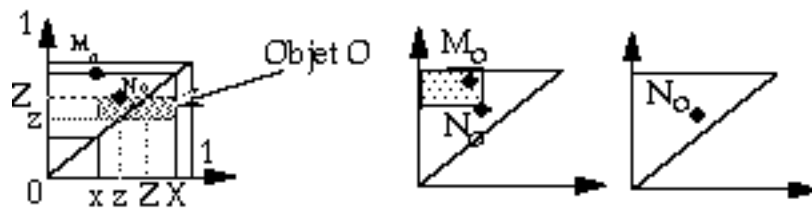


Figure VII-20 : représentation de la boîte englobante d'un objet répondant aux conditions de ce cas particulier :  $x < z < Z < X$  se traduit par le fait que  $M_o$  se situe dans le carré supérieur gauche de coin inférieur droit  $N_o$ .

Dans ce cas, la formule de  $\eta_p$  est (Cf. II-5) :

$$\eta_p = \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{r} \right) \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} (1 - i_{1T, 2T})$$

$$\text{avec } i_{1T,2T} = \iiint\limits_{Z_{1T} \times Z_{2T}} 24 * \mathbb{1}_{x < z < Z < \chi} \, dx dX dz dZ$$

Elle donne après intégration quadruple et simplification (détails fastidieux non donnés) :

$$\eta_p = \frac{(k-r)^2}{30k^5 r^2} (1-k)(1+k)(4-k+24k^2-26k^3)$$

Comparons ce modèle avec la réalité pour  $r^2=256*256$  pixels et 1000 objets :

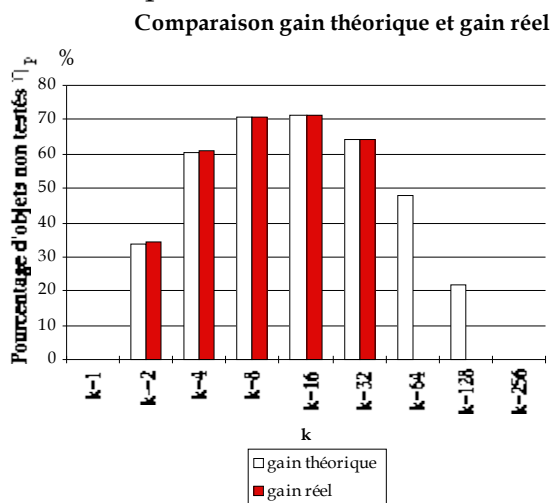


Figure VII-21a : comparaison théorie et réalité en topologie carrée (avec dépendance donnée par la densité  $f=24 * \mathbb{1}_{x < z < Z < \chi}$ )

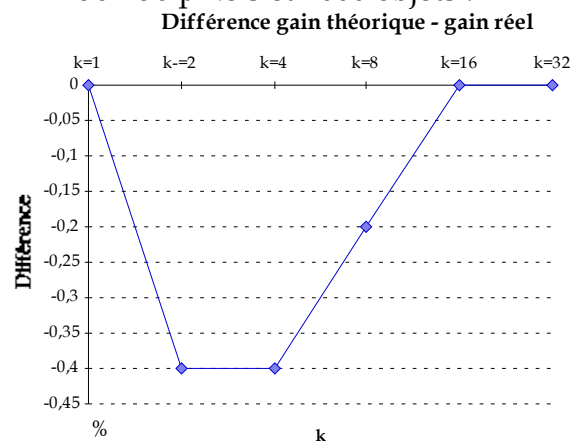


Figure VII-21b : courbe donnant la différence entre les pourcentages de gain de la théorie et de la réalité (en topologie carrée pour ce tirage).

On constate sur les Figures VII-21 que les courbes ont le même comportement et que l'écart de gain entre celui donné par le programme et celui donné par l'équation théorique est toujours bon (0,4% maximum).

En conclusion, nous pouvons dire que ce test valide lui aussi l'évaluation statistique de notre programme. Le comportement du lancer de rayon vis à vis du gain en nombre d'objets non testés a donc été finement prédit sur deux scènes statistiques différentes.

## II.6) Application à la prédiction du gain pour des scènes réelles

Nous avons montré qu'il était possible de modéliser le comportement d'une version simplifiée de notre lancer de rayon traitant une scène statistiquement créée. Deux types de scènes statistiques ont été étudiées :

- objets dont les dimensions sont tirées indépendamment,
- objets dont les dimensions sont tirées avec dépendance.

Cependant dans ces deux études nous nous plaçons dans le cas où la fonction de répartition était fixée a priori par une loi statistique. Que se passe-t-il dans le cas d'une scène "réelle", c'est-à-dire non générée statistiquement mais par notre modeleur par exemple ?

### II.6.a) Évaluation de la fonction de répartition d'une scène "réelle"

Si nous voulons réaliser une étude de performance de l'algorithme de lancer de rayon sur une telle scène, il faut nécessairement trouver une approximation de la densité qui aurait pu générer une scène présentant les mêmes caractéristiques statistiques et vérifier que les résultats sur ce modèle statistique sont cohérents avec ceux sur la scène réelle. Si c'est le cas alors nous aurons abouti à deux résultats :

- validation de l'approche statistique quelle que soit le type de scène (statistique ou "réelle"),

- indépendance par rapport à la modélisation d'une scène qui ne serait plus seulement donnée par un fichier informatique d'un format donné mais également par une fonction de répartition permettant de fixer au mieux les paramètres de son calcul (nombre de processus par exemple).

Nous aurions alors réussi, sur une modélisation d'un lancer de rayon simplifié à son premier niveau, à ne plus recourir ni aux machines ni à un jeu de scènes standardisées pour évaluer les performances.

### II.6.b) Démarche

Étant donnée une scène réelle, il s'agit donc de reconstituer la densité la décrivant au mieux statistiquement. Les espaces  $\Omega_x$  et  $\Omega_z$  (dans le cas de la topologie carrée) sont découpés en un nombre fixe (à déterminer Cf. remarque ci-dessous) de zones carrées ou triangulaires (Cf. Figure VII-22).

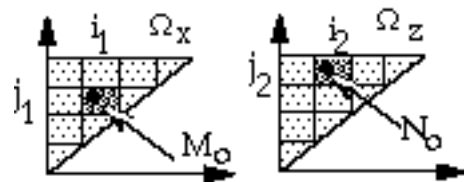


Figure VII-22

Chacun de ces espaces peut donc être représenté par la partie supérieure à la "diagonale" d'une matrice  $S$  de dimension  $z^4$  si l'espace a été découpé en zones carrées de surface  $1/z^2$  (et triangulaires de surface  $1/(2z^2)$ ). En fait les  $(z*(z+1)/2)^2$  cellules "au-dessus de la diagonale" de  $S$  correspondent à des cellules de  $\Omega_x \times \Omega_z$ .

Les coefficients de la matrice sont initialement mis à 0.

Chaque objet  $O$  de la scène réelle peut être projeté sur l'écran de façon à déterminer les extrema verticaux et horizontaux. On peut donc obtenir un couple de points  $M_o(x,X)$  appartenant à  $\Omega_x$  et  $N_o(z,Z)$  appartenant à  $\Omega_z$  et correspondant à un emplacement (couple de cases  $i_1,j_1$  et  $i_2,j_2$ ) dans la matrice  $S$  (Cf. Figure VII-22),

emplacement dont la valeur sera incrémentée d'une unité.

Les coefficients sont ensuite normalisés de façon à définir une densité (c'est-à-dire d'intégrale 1 lorsque l'on intègre sur  $\Omega$ ). Cette normalisation permet de reconstruire cette densité pour une scène réelle :

$$f_{\text{rec}}(i_1, j_1, i_2, j_2) = S(i_1, j_1, i_2, j_2) / (N * s(i_1, j_1) * s(i_2, j_2)), \text{ (rec pour "reconstruit")}$$

en notant N le nombre total d'objets, et  $s(i, j)$  la surface d'une zone, donnée par  $s(i, j) = \frac{1}{2z^2}$  pour une zone  $i, j$  triangulaire et  $s(i, j) = \frac{1}{z^2}$  pour une zone carrée de  $\Omega_x$  ou  $\Omega_z$ .

Il devient alors simple de programmer l'intégration de cette densité constante par morceaux, de façon à obtenir pour un  $k$  donné le pourcentage d'objets non testés selon la formule du II.5) :

$$\eta_p = \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{r} \right) \sum_{i=0}^{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{2^{k-1}} (1 - i_{1T, 2T})$$

$$\text{avec } i_{1T, 2T} = \int \int \int_{Z_{1T} \times Z_{2T}} f_{\text{rec}}(x, X, z, Z) dx dX dz dZ$$

Remarque : Recherche du meilleur pas d'échantillonnage  $1/z$  sur une scène aléatoire pour reconstruire  $f_{\text{rec}}$ .

Pour les trois tests qui suivent, la résolution de l'écran a été fixée à  $r^2 = 256 \times 256$  pixels.

Pour reconstruire une densité à partir d'une scène réelle (ici la scène aléatoire avec dépendance du cas particulier 2 - Cf. II.5.b) puis pour estimer les gains, il va être nécessaire de fixer préalablement certains paramètres dont le pas  $1/z$  d'échantillonnage des espaces  $\Omega_x$  et  $\Omega_z$ . Pour cela, nous avons calculé la

différence entre les résultats théoriques (donnés par la formule de  $\eta_p$ ) et les résultats trouvés par reconstruction pour une scène aléatoire de 1000 objets en faisant varier la finesse du découpage (grille de  $z * z$  zones découpant  $\Omega_x$  et  $\Omega_z$ ) ainsi que le nombre  $k*k$  de processus de l'écran (Cf. Figure VII-23). Afin de simplifier les problèmes d'intégration de  $f_{rec}$ ,  $z$  et  $k$  seront choisis comme des puissances de 2.

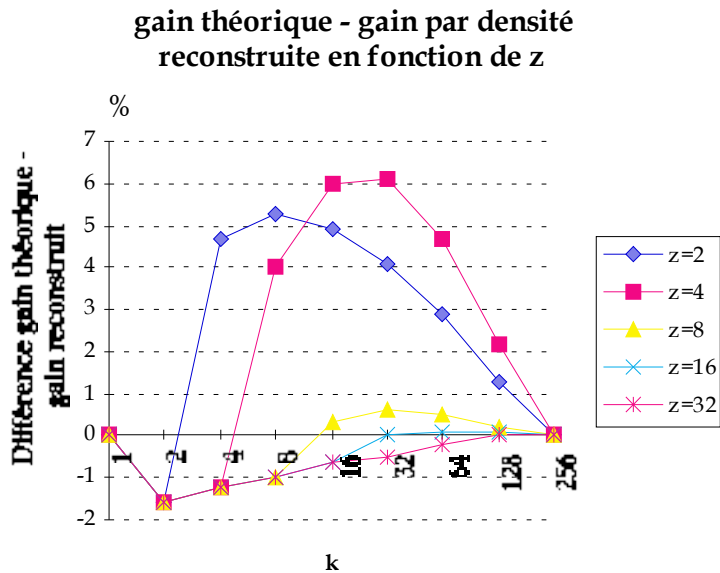


Figure VII-23 : Recherche du meilleur pas de discrétisation

Théoriquement, plus le découpage de  $\Omega$  est fin ( $z$  grand), meilleure est l'évaluation de la densité et donc des intégrales  $i_{1T,2T}$  donnant  $\eta_p$ . C'est pourquoi, on constate que pour 1000 objets (et en fait même pour de plus grosses scènes), un découpage correspondant à  $z=16$ , c'est-à-dire  $(16*17/2)^2=18496$  zones recouvrant  $\Omega_x \times \Omega_z$  donne les meilleurs résultats pour cette scène où les objets sont majoritairement concentrés sur la diagonale (de plus, un nombre plus grand de zones serait trop coûteux en mémoire). C'est ce découpage que nous prendrons pour les deux tests suivants.

Nous pouvons maintenant comparer les 3 séries de résultats sur cette scène de 1000 objets, avec  $z=16$  et  $r=256$  :

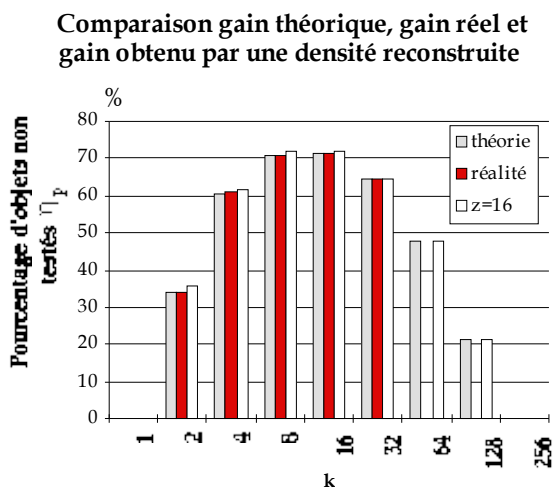


Figure VII-24a : comparaison théorie, réalité et densité reconstruite (scène avec dépendance donnée par la densité  $f=24*\mathbb{1}_{x<z<Z<x}$ )

Calcul de la différence entre les 3 courbes

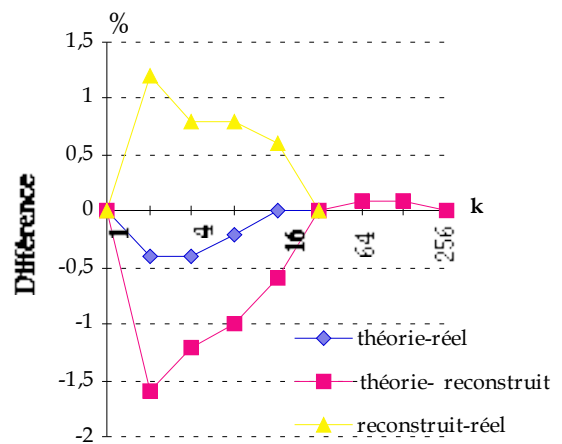


Figure VII-24b : courbe évaluant la différence entre théorie, densité reconstruite et réalité en topologie carrée pour ce tirage et  $z=16$ .

### II.6.c) Scène "sphere flakes"

Nous pouvons maintenant évaluer l'écart entre le gain réel de nos optimisations (donné par le programme de lancer de rayon lui-même) et les gains estimés statistiquement par cette méthode de reconstruction de la densité d'une scène réelle.

Résultats comparés pour une scène de 938 objets (sphere flakes),  $r=256$ ,  $z=16$  :

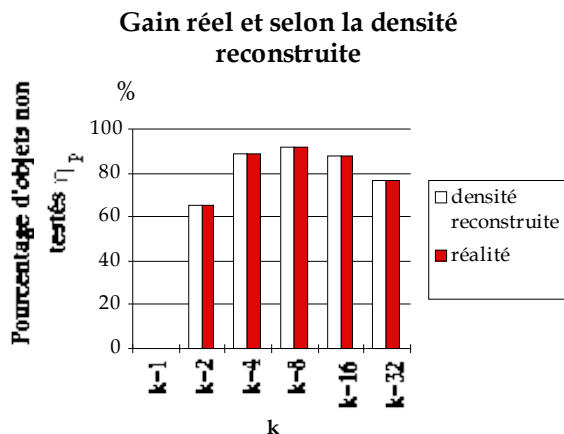


Figure VII-25a : comparaison des gains donnés par le lancer de rayon et estimés par la densité reconstruite.

Différence : gain densité reconstruite - gain réel

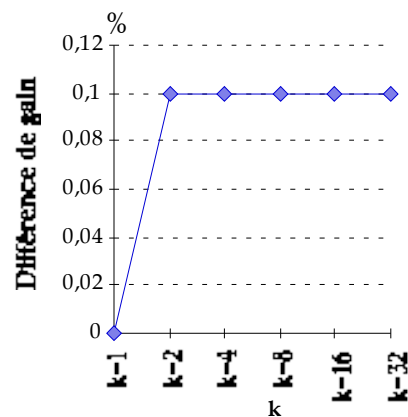


Figure VII-25b : différence entre les deux courbes

Sur les Figures VII-25, on constate que l'on reste en dessous de 1% d'erreur entre le calcul de gain statistique et la réalité. Le "sphere flakes" est une scène où les objets sont majoritairement concentrés sur de petites zones de l'espace ce qui peut expliquer la faible différence entre les résultats réels et reconstruits. Ce résultat est important, car le coût du calcul statistique est négligeable devant le calcul de la scène et les résultats obtenus nous permettent de savoir quel est le **nombre optimal de processus** (ici, on constate que l'on a le meilleur résultat pour  $k=8$ ).

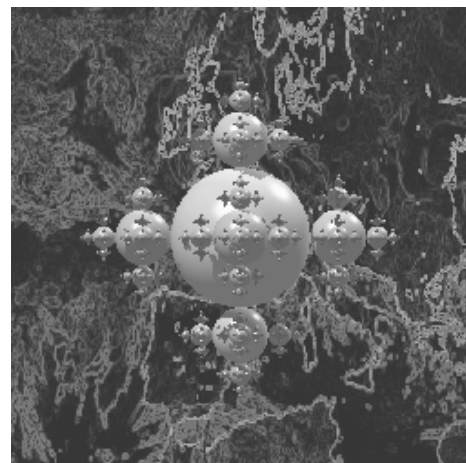


Figure VII-25c : scène test

### II.6.d) Scène déduite de collier, 250 objets (Cf. Album, chapitre IX)

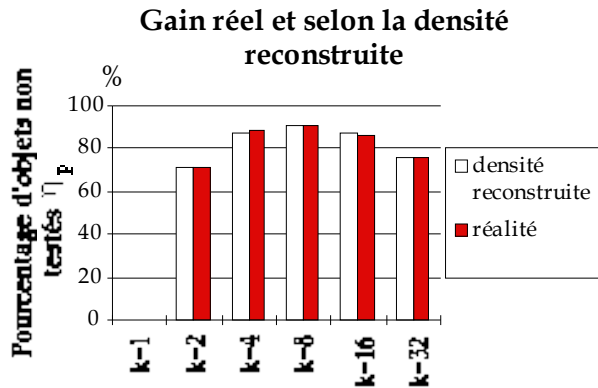


Figure VII-26a :

comparaison des gains donnés par le lancer de rayon et estimé par la densité reconstruite.

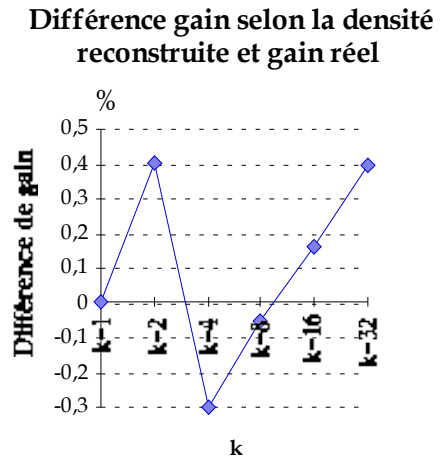


Figure VII-26b : différence entre les deux courbes

Même pour une scène plus petite (et totalement différente de la première), les écarts entre réalité et estimation sont inférieurs à 1% ce qui nous permet toujours de trouver a priori pour quel découpage de l'écran l'algorithme de lancer de rayon aura le meilleur comportement (ici encore pour  $k=8$ ). Cependant, les résultats montrent des écarts plus importants que pour l'exemple précédent. On peut avancer une explication à ce phénomène : nous considérons moins d'objets dans cette scène (250 au lieu de 938),



Figure VII-26c : scène test

II.6.e) Scène déduite des objets de base, 17 objets (Cf. Album, chapitre IX)

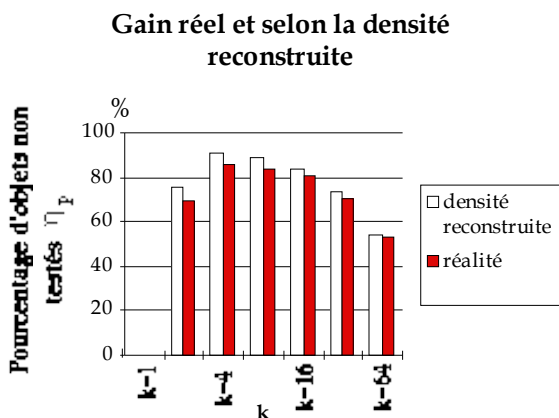


Figure VII-27a : comparaison des gains donnés par le lancer de rayon et estimé par la densité reconstruite.

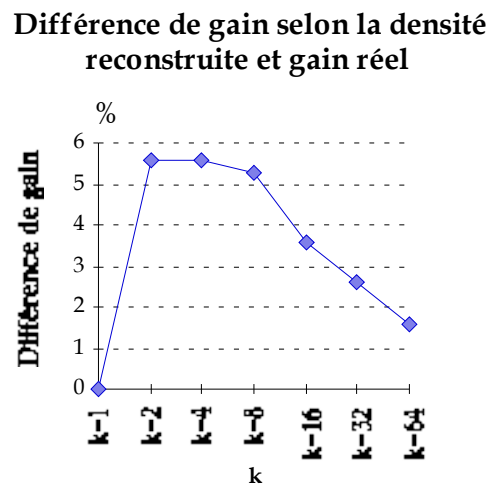


Figure VII-27b : différence entre les deux courbes

Comme pour les trois tests précédents, il y a une bonne concordance entre le gain donné par la densité reconstruite et la réalité. Cependant, sur cette scène de peu d'objets (17), les écarts constatés sont plus importants et montent jusqu'à près de 6%. Enfin, le meilleur découpage est ici obtenu pour  $k=4$ .

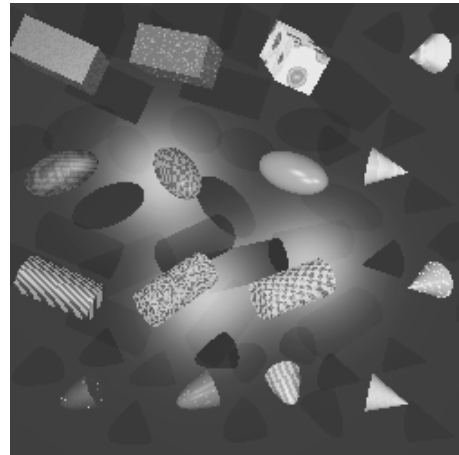


Figure VII-27c : scène test

### II.6.f) Conclusion

Pour des scènes où le nombre d'objets est important voir moyen (supérieur à 250), on est en mesure de bien estimer les gains par simulation statistique. Pour des scènes beaucoup plus petites, on peut obtenir une idée raisonnable des gains.

Il est donc possible de choisir un grain de parallélisation adapté à la scène à un faible coût.

### III) Modélisation et adaptation de la partition de l'écran à la scène

Jusqu'à présent, la partition de l'écran en zones primaires de pixels associées aux processus a été réalisée sans contrainte particulière. Ainsi, quelle que soit la scène, la partition choisie est toujours régulière (que ce soit pour la partition bande ou carrée).

Il paraît pourtant clair qu'adapter cette partition à la "présence statistique" d'objets conduirait à un équilibrage de la charge des processus. Il s'agit, par exemple, de mettre plus de bandes ou de zones carrées là où il y a plus d'objets. Une première mesure faite dans les paragraphes précédents de la charge globale de l'ensemble des processus est donnée par  $\eta_p$  qui mesure le pourcentage d'objets non testés en moyenne par pixel.  $\eta_p$  dépend (Cf. Formule générale du gain dans le cas d'une topologie bande § I.5.a et Formule générale du gain en topologie carrée § II.5) des coordonnées  $(x_1, \dots, x_{k-1})$  des  $k$  bandes (Cf. Figure VII-5) ou  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), (\beta_1, \dots, \beta_{m-1})$  des frontières horizontales et verticales des zones carrées des processus (Cf. figure VII-14). Le problème d'optimisation que nous venons de décrire revient donc à rechercher les  $x_i$  pour les bandes ou les  $(\alpha_i, \beta_j)$  pour les zones carrées qui pour une scène donnée vont maximiser la quantité  $\eta_p$  qui mesure le pourcentage moyen d'objets économisés par rayon primaire (donc le gain).

Nous traitons en détail dans la suite de ce paragraphe le cas des bandes. Le cas



des zones carrées peut se traiter de façon analogue. Le paragraphe s'achèvera par la présentation d'autres types d'optimisations envisageable et dont le développement est en cours.

### III.1) Introduction

Un ensemble cohérent  $B = \{m_0, \dots, m_{k-1}\}$  de bandes (Cf. § I.3) est en fait caractérisé par les "premières lignes" d'ordonnées  $x_0=0, x_1, \dots, x_{k-1}$  dans  $[0..1]$  qui délimitent les bandes. Une idée naturelle est de décider de choisir ces valeurs  $x_1, \dots, x_{k-1}$  comme échantillon déterminé selon une loi de probabilité  $Q$  sur  $[0..1]$ , loi de probabilité  $Q$  qui pourrait être choisie pour une scène statistique  $S = (\Omega, a, P)$  donnée de façon à maximiser  $\eta_p$  (ou tout autre caractéristique décrivant la fonction qualité de fonctionnement de l'algorithme). Ce type de modélisation présente un intérêt évident puisque bien dans l'esprit du modèle de scène développé jusqu'à présent mais également quelques difficultés que nous décrirons qualitativement ci-dessous :

1) Un échantillon  $y_1=Y_1(\omega), \dots, y_{k-1}=Y_{k-1}(\omega)$  (le changement de notation est volontaire) produit selon un tirage aléatoire  $\omega$  selon une loi  $Q$  sur  $[0..1]$  (les variables  $Y_1, \dots, Y_{k-1}$  sont indépendantes de même loi  $Q^{(1)}$ ) n'est pas générée de façon croissante comme la définition des bandes nous l'impose. Cet inconvénient se lève très facilement par l'utilisation des classiques "statistiques d'ordre" (Cf. [BBN92]) : on appelle  $X_1, \dots, X_{k-1}$  les variables aléatoires (v.a.) sur  $\Lambda$  déduites du rangement par valeurs croissantes de  $Y_1, \dots, Y_{k-1}$ , c'est à dire que pour tout  $\omega$  de  $\Lambda$ , on a  $X_1(\omega) = \min_{i=1, \dots, k-1} Y_i(\omega), X_{k-1}(\omega) = \max_{i=1, \dots, k-1} Y_i(\omega), X_j(\omega)$  étant la  $j^{\text{ème}}$  valeur par ordre croissant dans  $\{Y_1(\omega), \dots, Y_{k-1}(\omega)\}$ . La théorie des statistiques d'ordre nous donne la loi des  $X_i$  connaissant la loi  $Q$  des  $Y_j$ . Notons que dans un tel modèle, la caractéristique  $\eta_p$  devient une v.a. sur  $\Lambda$ . Exprimer  $\eta_p$  sera facile en fonction des v.a.  $X_i$  et la connaissance des lois des  $X_i$  permettra de déterminer diverses caractéristiques de la v.a.  $\eta_p$  : nous le ferons pour son espérance.

2) Une seconde approximation est de générer des v.a. à valeurs dans  $[0..1]$  et donc des valeurs limites de bandes  $x_0, \dots, x_{k-1}$  réelles et non à valeurs dans  $l = \{i/r_z, 0 \leq i < r_z\}$  puisqu'il y a un nombre fini  $r_z$  (par exemple 1024) de positions possibles dans nos tests pour les limites de bandes. Cette approximation sera considérée comme du second ordre si  $r_z$  est grand, ce qui pourra conduire à négliger les termes en  $1/r_z$ .

Évidemment, une alternative à ce modèle aurait pu être d'avoir des v.a.  $Y_j$  non pas continues à valeur dans  $[0..1]$  mais discrètes à valeurs dans  $l$ . Cette alternative présente cependant plusieurs inconvénients majeurs qui nous ont conduit à ne pas la retenir dans cette première approche :

---

<sup>1)</sup>Une variable aléatoire  $Y$  définie sur un espace probabilisé  $\Lambda$  à valeurs dans  $[0..1]$  a pour loi  $Q$  si  $\text{Prob}(Y \in [a,b]) = Q([a,b])$ .

- Générer des v.a.  $(Y_j)_{1 \leq j \leq k-1}$  discrètes à valeurs dans  $I$  selon une loi  $Q$  sur  $I$  (qui est en fait une somme de mesures de Dirac sur les éléments de  $I$ ) conduira fatalement à la possibilité de plusieurs valeurs identiques parmi les  $(Y_j)_{1 \leq j \leq k-1}$ , ce qui n'est pas possible puisque conduisant à des bandes de hauteur nulle.

- Les lois des  $X_j$  (en ordre statistique à partir des  $Y_j$ ) auront une expression beaucoup plus complexe que dans le cas continu rendant inutilement difficiles les calculs que nous présentons dans la suite.

Si l'on modifie le modèle en tirant des  $Y_j$  "sans remise" (afin de corriger le problème précédent), les  $Y_j$  ne sont plus indépendantes. La détermination des lois des  $X_j$  devient beaucoup plus complexe et semble-t-il peu utilisable. On préférera donc considérer un modèle de v.a.  $(Y_j)_{1 \leq j \leq k-1}$  à valeurs dans  $[0..1]$ . Hélas, une fois déterminée l'espérance  $e(Q,P)=E(\eta_p)$  de la v.a.  $\eta_p$ , espérance dépendant de la scène (via  $P$ ) et du choix aléatoire des bandes (via  $Q$ ), lorsque nous optimiserons  $E(\eta_p)$  en cherchant  $Q$  maximisant  $e(Q,P)$ , nous constaterons que dans certaines situations la densité optimale  $Q$  est une somme de mesures de Dirac. Ceci nous ramène alors de fait au problème de bandes de mesure nulle par des choix de valeurs identiques pour certains  $Y_j$ .

Nous présentons au § III.2) les définitions précises du modèle. Au § III.3), nous montrons que dans ce modèle la moyenne  $E(\eta_p)$  prend une forme très intéressante. La maximisation de  $E(\eta_p)$  est abordée au § III.4). Le problème qui apparaît ici semble non classique et il s'agit là d'une première approche. Le § III.5) propose quelques pistes intéressantes pour améliorer l'évaluation de l'algorithme.

### III.2) Définition et présentation du modèle

Définition. On définit  $Q$  comme la loi de probabilité sur  $[0..1]$  servant à générer un  $(k-1)$  échantillon indépendant de limites de bandes  $Y_1, \dots, Y_{k-1}$ .

Remarque. On présupposera  $Q$  définie par une densité  $\varphi$  sur  $[0..1]$ .

Rappel. La probabilité  $P$  (de densité  $f$ ) définit, elle, l'ensemble des objets de la scène.

Notation. On note  $\Phi$  la fonction de répartition de  $\varphi$ . Elle est définie par :

$$\forall t \in [0..1], \Phi(t) = \int_0^t \varphi(v) dv$$

$$\text{et } \Phi(t) = 0 \text{ si } t \leq 0, \Phi(t) = 1 \text{ si } t \geq 1$$

#### Définition des limites de bandes :

Soient  $Y_1, \dots, Y_k$ , un ensemble de variables aléatoires indépendantes de même loi  $Q$ . On range ces variables en ordre croissant et l'on définit ainsi  $k-1$  variables

aléatoires  $(X_j)_{1 \leq j \leq k-1}$  telles que :

$$\forall \omega \in \Lambda : X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \dots \leq X_{k-1}(\omega)$$

où  $(X_1(\omega), \dots, X_{k-1}(\omega))$  est la permutation de  $(Y_1(\omega), \dots, Y_{k-1}(\omega))$  rangeant ces réels par valeur croissante.

Définition de la v.a. gain par rayon primaire  $\eta_p$  :

On déduit de la formule donnant  $\eta_p$  (Cf. § I.5.a) dans le cas de la topologie bande, la définition de la v.a.  $\eta_p$  :

$$\eta_p(\omega) = \sum_{i=1}^k \left( X_i(\omega) - X_{i-1}(\omega) - \frac{1}{r_z} \right) \left\{ \int_0^{X_{i-1}(\omega)} \left( \int_0^v f(u, v) du \right) dv + \int_{X_i(\omega)}^1 \left( \int_{X_i(\omega)}^v f(u, v) du \right) dv \right\}$$

$$= \chi_1(\omega) + \sum_{i=2}^{k-1} \chi_i(\omega) + \chi_k(\omega)$$

où  $\chi_i(\omega)_{1 \leq i \leq k-1}$  représente le nombre d'objets non testés pour la bande  $i$  de hauteur  $X_i(\omega) - X_{i-1}(\omega)$ .

avec  $X_0(\omega) \equiv 0$ ,  $X_k(\omega) \equiv 1$  et  $(X_i(\omega))_{1 \leq i \leq k-1}$  v.a. précédemment définies.

La détermination de l'espérance (moyenne) de la v.a.  $\eta_p$  nécessite de connaître quelques résultats classique sur les statistiques d'ordre (Cf. [BBN92]) :

1) La densité de  $X_i$  :

$\forall i \in [1 \dots k-1]$  :

$$G_{X_i}(x_i) = \frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-1-i)!} \varphi(x_i) \Phi(x_i)^{i-1} [1 - \Phi(x_i)]^{k-1-i}$$

Cas particuliers (utiles dans la suite) :

a)  $i = k-1$  :

$$G_{X_{k-1}}(x_{k-1}) = (k-1) \varphi(x_{k-1}) \Phi(x_{k-1})^{k-2}$$

b)  $i = 1$  :

$$G_{X_1}(x_1) = (k-1) \varphi(x_1) [1 - \Phi(x_1)]^{k-2}$$

2) La densité conjointe de  $X_{i-1}, X_i$  <sup>(2)</sup> :

---

<sup>2)</sup> Rappel. Soient  $(X, Y)$  deux variables aléatoires. On dit qu'elles admettent une densité conjointe  $g(X, Y)$  si  $g$  est une fonction positive, intégrable sur tout pavé  $[s_1 t_1] \times [s_2 t_2]$  et si l'on a pour

On trouve dans [BBN92] p.16 l'expression de cette densité conjointe :

$$G_{X_{i-1}, X_i}(x_{i-1}, x_i) = \frac{(k-1)!}{(i-2)!(k-1-i)!} \varphi(x_{i-1})\varphi(x_i)\Phi(x_{i-1})^{i-2} [1 - \Phi(x_i)]^{k-1-i}$$

### III.3) Calcul de la moyenne $E(\eta_p)$ de la v.a. donnant le nombre moyen d'objets non testés par rayon primaire

Le choix des bandes étant maintenant le résultat d'un tirage aléatoire, nous ne pouvons connaître  $\eta_p$  qu'à travers ses caractéristiques : son espérance, son écart type...

Si  $\chi_i(\omega)$  est le nombre d'objets non testés pour la bande  $i$  de hauteur aléatoire  $X_i(\omega) - X_{i-1}(\omega)$  notée  $x_i - x_{i-1}$ , l'espérance de  $\eta_p$  est calculable à partir de celle de la première bande, de la dernière et des  $k-2$  bandes intermédiaires (on a  $k$  bandes issues de  $k-1$  tirages). Donc, en reprenant la formule de  $\eta_p$  donnée au paragraphe précédent, on déduit :

$$E(\eta_p(\omega)) = E(\chi_1) + \sum_{i=2}^{k-1} E(\chi_i) + E(\chi_k)$$

avec :

$$\text{terme } \langle 1 \rangle : \chi_1(\omega) = \left( X_1(\omega) - \frac{1}{r_z} \right) \int_{X_1(\omega)}^1 \left( \int_{X_1(\omega)}^v f(u, v) du \right) dv$$

$$E(\chi_1(\omega)) = \int_0^1 dx_1 \left( x_1 - \frac{1}{r_z} \right) \int_{x_1}^1 \left( \int_{x_1}^v f(u, v) du \right) dv (k-1)\varphi(x_1)[1 - \Phi(x_1)]^{k-2}$$

terme  $\langle i \rangle$  :  $\forall i$  tel que :  $2 \leq i \leq k-1$  :

$$E(\chi_i(\omega)) = \int_0^1 dx_i \int_0^{x_i} dx_{i-1} \left( x_i - x_{i-1} - \frac{1}{r_z} \right) \left[ \int_0^{x_{i-1}} \left( \int_0^v f(u, v) du \right) dv + \int_{x_i}^1 \left( \int_{x_i}^v f(u, v) du \right) dv \right]^* \frac{(k-1)!}{(i-2)!(k-1-i)!} \varphi(x_{i-1})\varphi(x_i)\Phi(x_{i-1})^{i-2} [1 - \Phi(x_i)]^{k-1-i}$$

$$\text{terme } \langle k \rangle : \chi_k(\omega) = \left( 1 - X_{k-1}(\omega) - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^{X_{k-1}(\omega)} \left( \int_0^v f(u, v) du \right) dv$$

$$E(\chi_k) = \int_0^1 dx_{k-1} \left( 1 - x_{k-1} - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^{x_{k-1}} \left( \int_0^v f(u, v) du \right) dv (k-1)\varphi(x_{k-1})\Phi(x_{k-1})^{k-2}$$

Nous allons montrer que  $E(\eta_p)$  est donnée par la formule :

---


$$\text{un tel pavé : } P(X \in [s_1, t_1], Y \in [s_2, t_2]) = \int_{s_1}^{t_1} \int_{s_2}^{t_2} g(x, y) dx dy$$

$$\begin{aligned}
 E(\eta_p) = & \int_0^1 ds \left( \int_0^s \int_0^v f \, dudv + \int_s^1 \int_s^v f \, dudv \right) \\
 & - \int_0^1 ds \left( \int_s^1 dt (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \left( \int_t^1 f(t, v) dv + \int_0^s f(u, s) du \right) \right) \\
 & - \frac{k-1}{r_z} \int_0^1 dt \left( (1 - \Phi(t)) \int_0^t f(u, t) du + \Phi(t) \int_t^1 f(t, v) dv \right)
 \end{aligned}$$

Formule 1 : Équation générale de l'espérance de gain en topologie bande

Démonstration (peut être omise en première lecture, elle est marquée d'un trait sur la marge).

Si l'on reprend le terme  $\langle i \rangle$  (en notant  $x_i$  par  $t$  et  $x_{i-1}$  par  $s$ ):

$$\sum_{i=2}^{k-1} \langle i \rangle = \int_0^1 dt \int_0^t ds \left( t - s - \frac{1}{r_z} \right) \left[ \int_0^s \left( \int_0^v f du \right) dv + \int_t^1 \left( \int_t^v f du \right) dv \right]^*$$

$$(k-1)(k-2)\varphi(s)\varphi(t) \sum_{i=2}^{k-1} \frac{(k-3)!}{(i-2)!(k-3-(i-2))!} \Phi(s)^{i-2} (1-\Phi(t))^{k-3-i-2}$$

↓

changement d'indice  $j = i - 2$  :  $\sum_{j=0}^{k-3} \frac{(k-3)!}{j!(k-3-j)!} \Phi(s)^j (1-\Phi(t))^{k-3-j} = (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-3}$

Finalement, on a pour les trois termes :

$$\sum_{i=2}^{k-1} E(\chi_i) = - \int_0^1 dt \int_0^t ds \left( t - s - \frac{1}{r_z} \right) \left[ \int_0^s \left( \int_0^v f du \right) dv + \int_t^1 \left( \int_t^v f du \right) dv \right]^* \frac{\partial^2 [\Phi(s) + 1 - \Phi(t)]^{k-1}}{\partial s \partial t}$$

par ailleurs :

$$E(\chi_1) = - \int_0^t dt \left( t - \frac{1}{r_z} \right) \left[ \int_t^1 \left( \int_t^v (f du) dv \right) \right] \frac{\partial (1 - \Phi(t))^{k-1}}{\partial t}$$

$$E(\chi_k) = \int_0^t ds \left( 1 - s - \frac{1}{r_z} \right) \left[ \int_0^s \left( \int_0^v (f du) dv \right) \right] \frac{\partial \Phi(s)^{k-1}}{\partial s}$$

Intégrons ces trois termes par partie :

$$\begin{aligned}
 1) \ E(\chi_k) &= \left[ \left( 1 - s - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^s \left( \int_0^v (fdu) dv \right) \right] \Phi(s)^{k-1} \Big|_0^1 \\
 &\quad - \int_0^1 ds \Phi(s)^{k-1} \left( - \int_0^s \left( \int_0^v fdu \right) dv + \left( 1 - s - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^s f(u, s) du \right) \\
 &= - \frac{1}{r_z} \int_0^1 \left( \int_0^v f(u, v) du \right) dv - \int_0^1 ds \Phi(s)^{k-1} \left( - \int_0^s \left( \int_0^v fdu \right) dv + \left( 1 - s - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^s f(u, s) du \right) \\
 2) \ E(\chi_1) &= - \frac{1}{r_z} \int_0^1 \left( \int_0^v f(u, v) du \right) dv + \int_0^1 dt (1 - \Phi(t))^{k-1} \left( \int_t^1 \left( \int_t^v fdu \right) dv + \left( t - \frac{1}{r_z} \right) \alpha'(t) \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{avec : } \alpha(t) = \int_t^1 \left( \int_t^v fdu \right) dv = \int_t^1 g(t, v) dv$$

$$\text{et : } g(t, v) = \int_t^v f(u, v) du$$

Si l'on cherche l'expression de  $\alpha'(t)$  :

$$\alpha'(t) = \int_t^1 \frac{\partial g}{\partial t}(t, v) dv - g(t, t) = - \int_t^1 f(t, v) dv$$

$$\begin{aligned}
 3) \ \sum_{i=2}^{k-1} E(\chi_i) &= \\
 &- \int_0^t dt \left( \left[ \left( t - s - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^s \left( \int_0^v fdu \right) dv + \int_t^1 \left( \int_t^v fdu \right) dv \right] \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \right) \Big|_{s=0}^{s=t} \\
 &- \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \times \left[ - \int_0^s \left( \int_0^v fdu \right) dv - \int_t^1 \left( \int_t^v fdu \right) dv + \left( t - s - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^s f(u, s) du \right] ds \\
 \sum_{i=2}^{k-1} E(\chi_i) &= \\
 &- \int_0^t dt \left( - \frac{1}{r_z} \left[ \int_0^t \left( \int_0^v fdu \right) dv + \int_t^1 \left( \int_t^v fdu \right) dv \right] ((1-k)\varphi(t)) \right. \\
 &- \left( t - \frac{1}{r_z} \right) \int_t^1 \left( \int_t^v fdu \right) dv \frac{\partial}{\partial t} (1 - \Phi(t))^{k-1} \\
 &\left. - \int_0^t ds \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \left[ - \int_0^s \left( \int_0^v fdu \right) dv - \int_t^1 \left( \int_t^v fdu \right) dv + \left( t - s - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^s f(u, s) du \right] \right)
 \end{aligned}$$

En intégrant par parties par rapport à t on obtient donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=2}^{k-1} E(\chi_i) = \\
& - \left[ \frac{1}{r_z} \int_0^t \left( \int_0^v f du \right) dv + \frac{1}{r_z} \int_t^1 \left( \int_t^v f du \right) dv (k-1) \Phi(t) \right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 dt (k-1) \Phi(t) \left( \frac{1}{r_y} \int_0^t f(u, t) du + \frac{1}{r_z} \alpha'(t) \right) \\
& + \left[ \left( t - \frac{1}{r_z} \right) \int_t^1 \left( \int_t^v f du \right) dv (1 - \Phi(t))^{k-1} \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 dt (1 - \Phi(t))^{k-1} \left( \int_t^1 \left( \int_t^v f du \right) dv + \left( t - \frac{1}{r_z} \right) \alpha'(t) \right) \\
& + \int_0^1 ds \int_s^1 dt \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \left( - \int_0^s \left( \int_0^v f du \right) dv - \int_t^1 \left( \int_t^v f du \right) dv + \left( t - s - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^s f(u, s) du \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=2}^{k-1} E(\chi_i) = \\
& - \frac{1}{r_z} \int_0^1 \left( \int_0^v f du \right) dv (k-1) + \int_0^1 dt (k-1) \Phi(t) \frac{1}{r_z} \left( \int_0^t f(u, t) du + \alpha'(t) \right) \\
& + \frac{1}{r_z} \int_0^1 \int_0^v f du dv - \int_0^1 dt (1 - \Phi(t))^{k-1} \left( \int_t^1 \int_t^v f du dv + \left( t - \frac{1}{r_z} \right) \alpha'(t) \right) \\
& + \int_0^1 ds \int_s^1 dt \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \left( - \int_0^s \left( \int_0^v f du \right) dv - \int_t^1 \left( \int_t^v f du \right) dv + \left( t - s - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^s f(u, s) du \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=2}^{k-1} E(\chi_i) = \\
& - \frac{1}{r_z} \int_0^1 \int_0^v f \quad dudv (k-1) + \int_0^1 dt (k-1) \Phi(t) \frac{1}{r_z} \left( \int_0^t f(u, t) du + \alpha'(t) \right) \\
& + \frac{1}{r_z} \int_0^1 \int_0^v f \quad dudv - \int_0^1 dt (1 - \Phi(t))^{k-1} \left( \int_t^1 \int_t^v f(u, t) \quad dudv + \left( t - \frac{1}{r_z} \right) \alpha'(t) \right) \\
& + \int_0^1 ds \left\{ (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \left( - \int_0^s \left( \int_0^v f du \right) dv - \int_t^1 \int_t^v f du dv + \left( 1 - s - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^s f(u, s) du \right) \right. \\
& \quad \left. - \int_s^1 dt (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \left( - 0 - \alpha'(t) + \int_0^s f(u, s) du \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=2}^{k-1} E(\chi_i) = & \\
 & -\frac{1}{r_z} \int_0^1 \int_0^v f \, dudv (k-1) + \int_0^1 dt (k-1) \Phi(t) \frac{1}{r_z} \left( \int_0^t f(u,t) du + \alpha'(t) \right) \\
 & + \frac{1}{r_z} \int_0^1 \int_0^v f \, dudv - \int_0^1 dt (1 - \Phi(t))^{k-1} \left( \int_t^1 \int_t^v f(u,t) \, dudv + \left( t - \frac{1}{r_z} \right) \alpha'(t) \right) \\
 & + \int_0^1 ds \left\{ \Phi(s)^{k-1} \left( - \int_0^s \left( \int_0^v f du \right) dv + \left( 1 - s - \frac{1}{r_z} \right) \int_0^s f(u,s) du \right) \right. \\
 & \quad \left. - \left( - \int_0^s \int_0^v f dudv - \int_s^1 \int_s^v f dudv - \frac{1}{r_z} \int_0^s f(u,s) du \right) \right. \\
 & \quad \left. - \int_s^1 dt (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \left( -\alpha'(t) + \int_0^s f(u,s) du \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Ce qui donne après simplifications :

avec  $\alpha'(t) = - \int_t^1 f(t,v) dv$

$$\begin{aligned}
 E(\eta_p) = E(\chi_1) + \sum_{i=2}^{k-1} E(\chi_i) + E(\chi_k) = & \\
 & \int_0^1 ds \left( \int_0^s \int_0^v f(u,v) \, dudv + \int_s^1 \int_s^v f(u,v) \, dudv \right) \\
 & - \int_0^1 ds \left( \int_s^1 dt (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \left( \int_t^1 f(t,v) dv + \int_0^s f(u,s) du \right) \right) \\
 & - \frac{k-1}{r_z} \int_0^1 dt \left( (1 - \Phi(t)) \int_0^t f(u,t) du + \Phi(t) \int_t^1 f(t,v) dv \right)
 \end{aligned}$$

Ce qui est la formule annoncée.

### III.4) Quelques conséquences de l'équation générale de l'espérance de gain en topologie bande donnant $E(\eta_p)$ (formule 1, Cf. § III.3)

Nous examinerons dans ce paragraphe les conséquences de la formule donnant  $E(\eta_p)$  et examinerons les perspectives de l'approche qui a conduit à cette formule.

#### III.4.a) Une majoration de $E(\eta_p)$

La formule donnant  $E(\eta_p)$  a une forme intéressante : si l'on examine les signes des trois termes, on s'aperçoit que le premier est le majorateur de  $\eta_p$  indépendant de la loi  $Q$  de choix des limites de bandes :



$$E(\eta_p) \leq \int_0^1 ds \left( \int_0^s \int_0^v f \, dudv + \int_s^1 \int_s^v f \, dudv \right), \text{ noté } E_{\max}(\eta_p)$$

Si l'on reprend le cas du § I.5.b (densité de la scène uniforme, cas bande),  $E_{\max}(\eta_p) = 66\%$  (calcul facile). Si l'on compare avec la figure VII-11, on voit que le maximum obtenu pour 32 bandes équi-réparties est de 61 %, ce qui est légèrement inférieur à cette majoration.

Donc trouver la meilleure partition bande, c'est trouver une fonction de répartition  $\Phi$  des bandes qui minore la somme des deux autres termes :

$$\begin{aligned} \sigma(\Phi) = & - \int_0^1 ds \left( \int_s^1 dt (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \left( \int_t^1 f(t, v) dv + \int_0^s f(u, s) du \right) \right) \\ & - \frac{k-1}{r_z} \int_0^1 dt \left( (1 - \Phi(t)) \int_0^t f(u, t) dt + \Phi(t) \int_t^1 f(t, v) dv \right) \end{aligned}$$

#### III.4.b) Quelques cas limite intéressants

Pour des cas limite simples, il est possible de tirer un certain nombre de conclusions de cette formule. Par exemple, supposons  $\phi$  strictement positive sur  $[0..1]$ , c'est-à-dire  $\Phi$  strictement croissante pour  $k$  grand ( $k \gg 1$ , beaucoup de bandes) et  $r_z$  grand devant  $k$  ( $r_z \gg k$ , beaucoup plus de lignes de pixels que de bandes), on constate que les deux derniers termes deviennent négligeables. En effet :

a)  $(\Phi(s) + 1 - \Phi(t))$  étant dans  $[0..1]$  pour tout  $t \geq s$  et égal à 1 sur un ensemble de mesure nulle de  $[0..1]^2$  ( $\Phi(s) = \Phi(t)$  si et seulement si  $s = t$  car  $\Phi$  strictement croissante),  $(\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1}$  tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini, quelle que soit  $\Phi$  strictement croissante.

Donc  $-\int_0^1 ds \left( \int_s^1 dt (\Phi(s) + 1 - \Phi(t))^{k-1} \left( \int_t^1 f(t, v) dv + \int_0^s f(u, s) du \right) \right)$  devient également négligeable lorsque  $k$  est grand pour  $\Phi$  strictement croissante.

b)  $-\frac{k-1}{r_z}$  tend vers 0 lorsque  $r_z$  est grand devant  $k$ , et dans cette situation quelle que soit  $\Phi$ ,  $-\frac{k-1}{r_z} \int_0^1 dt \left( (1 - \Phi(t)) \int_0^t f(u, t) dt + \Phi(t) \int_t^1 f(t, v) dv \right)$  devient également négligeable.

Dans cette situation d'une densité  $\phi$  de choix des bandes strictement positive et d'une très grande résolution de l'écran  $r_z$ , grande par rapport à un grand nombre  $k$  de processus (parallélisme massif), le niveau des performances est proche de  $E_{\max}(\eta_p)$  et indépendant du choix exact de  $\phi$ . On n'a donc aucune autre contrainte sur la façon de tirer les bandes que d'imposer une densité non nulle sur tout  $[0..1]$ . Ceci peut être vérifié par une simulation numérique :

a) Tirons une scène aléatoirement selon une densité uniforme :  $f \sim \mathcal{U}$  sur  $\Omega$ . On a alors  $E_{\max}(\eta_p) = 2/3$  (vérification facile).

b) Effectuons les tirages de bandes suivants :

\* tirage 1 selon une densité uniforme,  $\varphi \sim \mathcal{U}$  sur  $[0..1]$

\* tirage 2 selon la loi :  $\varphi(t) = 2/3 * (1+t)$  sur  $[0..1]$

\* tirage 3 selon la loi :  $\varphi(t) = (0.1 + 100 * t) / 50.1$  sur  $[0..1]$

**1<sup>er</sup> cas :  $r_z = 1000000$  très grand**

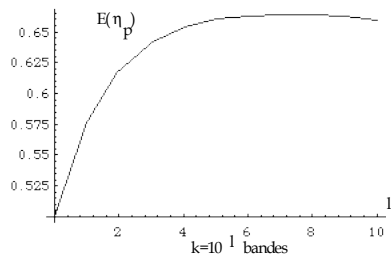


Figure VII-28a :  $\eta_p$  en fonction du tirage de  $k = 10 * 2^l$  bandes :  $\varphi$  uniforme

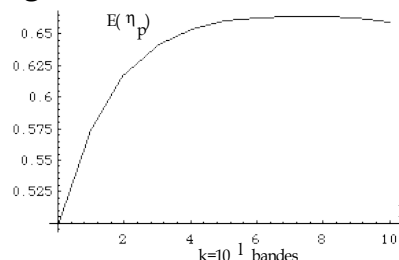


Figure VII-28b :  $\eta_p$  en fonction du tirage de  $k = 10 * 2^l$  bandes :  $\varphi(t) = 2/3 * (1+t)$

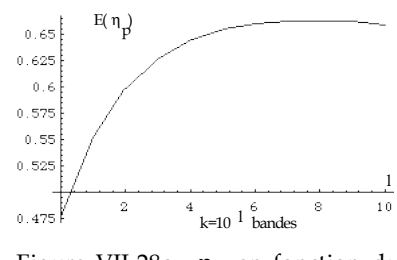
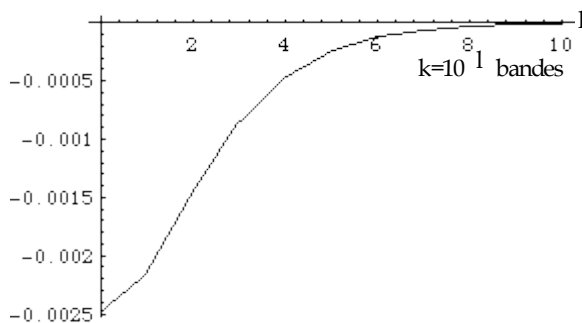
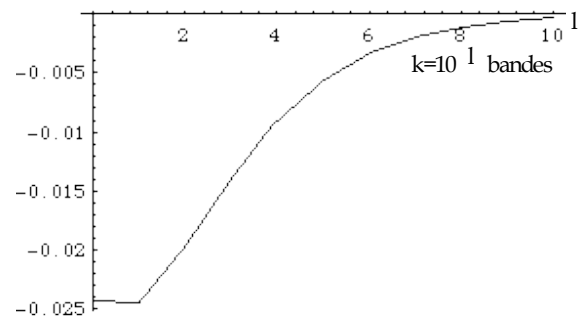


Figure VII-28c :  $\eta_p$  en fonction du tirage de  $k = 10 * 2^l$  bandes :  $\varphi(t) = (0.1 + 100 * t) / 50.1$



Différence de gain  
Figure VII-28d : Différence de gain  $\eta_p$  entre les courbes 28b et 28a



Différence de gain  
Figure VII-28e : Différence de gain  $\eta_p$  entre les courbes 28c et 28a

Figures VII-28 : Étude de  $E(\eta_p)$  pour trois densités de bandes différentes, un grand nombre de bandes et une très grande résolution ( $f$  uniforme).

Les courbes VII-28a,b,c donnant  $E(\eta_p)$  sont pratiquement identiques et égales à  $E_{\max}(\eta_p) = 2/3$  dès que le nombre  $k$  de bandes est suffisamment grand (erreur relative inférieure à  $0,005/0,65$  pour  $k > 10 * 2^6 = 640$  bandes - Cf. Figure VII-28d,c). Ceci montre l'indépendance du gain par rapport à la loi du choix des bandes dans les conditions pré-citées.

**2<sup>nd</sup> cas :  $r_z = 1024$ , conditions usuelles de test (Cf. § I.5.b)**

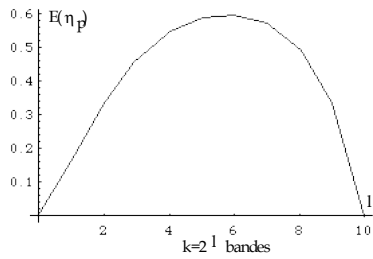


Figure VII-29a :  $\eta_p$  en fonction du tirage de  $k=2^l$  bandes,  $\varphi$  uniforme

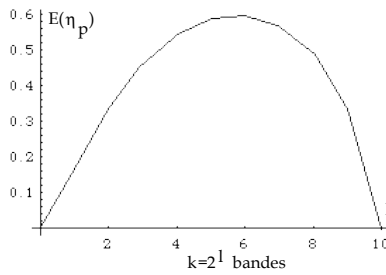


Figure VII-29b :  $\eta_p$  en fonction du tirage de  $k=2^l$  bandes :  $\varphi(t)=\frac{2}{3}*(1+t)$

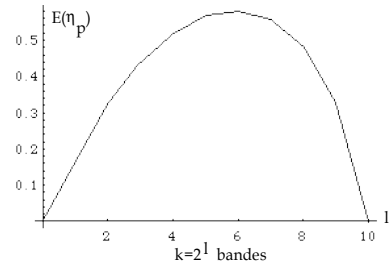


Figure VII-29c :  $\eta_p$  en fonction du tirage de  $k=2^l$  bandes :  $\varphi(t)=\frac{(0.1+100*t)}{50.1}$

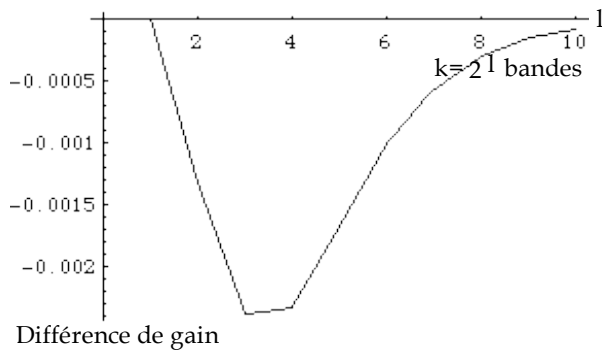


Figure VII-29d : Différence de gain  $\eta_p$  entre les courbes 29b et 29a

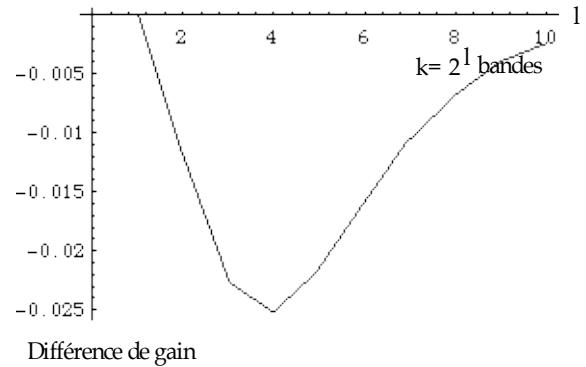


Figure VII-29e : Différence de gain  $\eta_p$  entre les courbes 29c et 29a

Figures VII-29 : Étude de  $E(\eta_p)$  pour trois densités de bandes différentes, de 1 à 1024 bandes et une résolution écran de 1024 lignes (f uniforme).

Pour cette seconde série de tests, nous nous plaçons dans le cas d'une résolution écran  $r_z$  classique (celle des tests du § I.5.b) et d'un nombre  $k$  de bandes variant de 1 à  $r_z=1024$  (celui des tests du § I.5.b).

On constate sur les courbes VII-29a,b,c que  $E(\eta_p) \approx E_{\max}(\eta_p)$  pour  $k=2^6=64$  c'est-à-dire  $k$  grand et cependant petit par rapport à  $r_z=1024$  (Cf. Figures VII-29d et 29e). Ce qui est bien ce que l'on attend. Par contre, l'erreur reste importante (erreur de  $0,025/0,6=0,04167$ ,  $k=64$ ). Cependant, pour cette valeur de  $k=64$ , nous sommes assez loin des conditions limites ( $k$  tendant vers l'infini).

Enfin, la simulation numérique de la Figure VII-29a permet de retrouver la courbe des résultats obtenue au § I.5.b. Cette formule générale permet donc de valider à nouveau tous les travaux effectués dans ce chapitre et d'évaluer théoriquement des configurations que nous n'avons pas implantées.

### III.4.c) Problèmes et perspectives posés par la maximisation de $E(\eta_p)$

Ce paragraphe présente une première approche de l'étude théorique de la maximisation de  $E(\eta_p)$ . Il est intéressant car montre que ce problème de maximisation d'une fonctionnelle dépendant de deux paramètres (f loi de la scène

donné et  $\Phi$  loi de la disposition des processus à déterminer) est un problème de calcul des variations. C'est donc un problème classique car abondamment étudié en mécanique, mais également non classique car se posant en des termes nouveaux et, surtout dans notre exemple, parce que le maximum recherché est parfois atteint sur le bord du domaine étudié, qui n'est pas ouvert. Le contenu de ce paragraphe est une première ébauche, encore incomplète de cette étude. Il donne quelques résultats généraux et résout quelques exemples où les calculs sont réalisables. Il peut être omis en première lecture.

La scène, et donc  $f$ , étant donnée, le problème de la maximisation de  $E(\eta_p)$  se ramène donc à celui de la minimisation de  $\sigma(\Phi)$  que l'on peut récrire (en permutant les noms  $s, t$  des deux variables muettes d'intégration de la première intégrale de sa définition) :

$$\sigma(\Phi) = - \int_0^1 dt \left( \int_t^1 ds (\Phi(t) + 1 - \Phi(s))^{k-1} \left( \int_s^1 f(s, v) dv + \int_0^t f(u, t) du \right) \right) - \int_0^1 dt \frac{k-1}{r_z} \left( (1 - \Phi(t)) \int_0^t f(u, t) dt + \Phi(t) \int_t^1 f(t, v) dv \right)$$

Pour  $k$  petit, on ne peut plus négliger le premier terme de  $\sigma(\Phi)$  ; on pourra toujours par contre négliger le second si  $r_z$  est grand. C'est dans ce cadre de  $k$  petit ( $=2, 3, \dots$  bandes) que les développements qui suivent présentent un intérêt.

Notations pour la suite de ce paragraphe :

$$\sigma(\Phi) = \int_0^1 \lambda(t, \Phi) dt$$

avec :

$$\alpha(t) = \int_t^1 f(t, v) dv, \quad \beta(t) = \int_0^t f(u, t) du$$

et :

$$\lambda(t, \Phi) = - \int_t^1 (\Phi(t) + 1 - \Phi(s))^{k-1} (\alpha(s) + \beta(t)) ds - \frac{k-1}{r_z} [(1 - \Phi(t))\beta(t) + \Phi(t)\alpha(t)]$$

Ainsi présenté, le problème de la minimisation de  $\sigma(\Phi) = \int_0^1 \lambda(t, \Phi) dt$  est proche d'un problème très classique du calcul des variations que l'on peut trouver posé dans les mêmes termes (aux notations près) par exemple dans [Ca90] p. 287. Ce problème s'énonce dans notre contexte de la façon suivante :

Rappel du problème classique de minimisation d'une fonctionnelle

(1) *Données :*

$V$  étant l'espace de Banach constitué des applications de classe  $C^1$ ,  $\Phi$  de  $[0..1]$  dans  $R$ , on considère le sous-espace affine  $W(0,1)$  de  $V$  constitué des "courbes"  $\Phi$  telles que  $\Phi(0)=0$  et  $\Phi(1)=1$ .  $W(0,1)$  est un espace complet pour la norme sur  $V$  définie par :  $\|\Phi\| = \sup_{t \in [0..1]} |\Phi(t)| + \sup_{t \in [0..1]} |\Phi'(t)|$

(2) *Définition de la fonctionnelle :*

On considère la fonctionnelle de  $\Phi$  :

$$\sigma(\Phi) = \int_0^1 \lambda(t, \Phi, \Phi') dt$$

dont le sens est lié aux conditions suivantes :

- $U$  est un ouvert de  $[0..1] \times R \times R$  et  $\lambda(t, x, y)$  une application  $C^1$  de  $U$  dans  $R$
- $\sigma$  est définie sur l'ouvert  $\Delta(0,1)$  constitué des courbes  $\Phi$  dans  $W(0,1)$  telles que  $(t, \Phi(t), \Phi'(t)) \in U$  pour  $t$  dans  $[0..1]$

(3) *Problème de minimum étudié :*

Étant donnée  $\Phi_0$  de  $W(0,1)$ , on dit que  $\sigma$  restreinte à  $W(0,1)$  admet un minimum relatif en  $\Phi_0$  si :

$$\sigma(\Phi) \geq \sigma(\Phi_0) \text{ pour toute } \Phi \in W(0,1) \text{ suffisamment voisine de } \Phi_0$$

(4) *Condition nécessaire pour l'obtention d'un tel extremum :*

Elle résulte d'un résultat classique du calcul différentiel qui exprime qu'une condition nécessaire pour que  $\sigma$  admette un minimum relatif en  $\Phi_0 \in W(0,1)$  est que :  $\sigma'(\Phi_0).u = 0$  pour tout  $u \in W(0,0)$  (courbes de  $V$  telles que  $u(0)=u(1)=0$ )

Cette condition nécessaire a une expression explicite pour le cas où  $\sigma$  est donnée par l'intégrale ci-dessus :

Condition d'extremum :

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial x}(t, \Phi(t), \Phi'(t)).u(t) + \frac{\partial \lambda}{\partial y}(t, \Phi(t), \Phi'(t)).u'(t) \right] dt = 0, \text{ pour toute fonction } u \text{ de}$$

classe  $C^1$ , de  $[0..1]$  dans  $R$ , telle que  $u(0)=u(1)=0$ .

Le problème qui se pose à nous est proche de ce problème classique. La plupart des conditions précitées sont satisfaites à l'exception de deux d'entre elles :

1) La première est que notre fonctionnelle  $\sigma$  dépend uniquement de  $\Phi$  et non de  $\Phi$  et  $\Phi'$  ( $=\phi$ , densité guidant le choix des limites de bandes). Ceci simplifie le problème, et nous permettra de choisir des fonctions de répartition  $\Phi$  bornées (c'est-

à-dire non nécessairement continue ou continûment différentiables, ce qui apparaît si la densité  $\varphi$  a des discontinuités) ou contient des mesures de Dirac.

2) La seconde condition imposée dans le rappel précédent est de rechercher le minimum relatif sur un ouvert  $\Delta(0,1)$  de  $W(0,1)$  pour que la condition  $\sigma'(\Phi_0).u=0$ ,  $u \in W(0,1)$  soit une condition nécessaire d'existence d'un extremum relatif en  $\Phi_0$ .  $\Delta(0,1)$  n'est plus nécessairement un ouvert dans le cadre de notre problème. En effet, nos fonctions  $\Phi$  ne sont pas quelconques, puisque ce sont des fonctions de répartitions. Elles satisfont les contraintes :

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0, \quad \Phi(1) = 1 \\ \Phi &\text{ croissante au sens large sur } [0,1] \end{aligned}$$

Ces deux différences conduisent en fait à considérer pour espace de Banach, l'espace  $\tilde{V}$  des applications bornées de  $[0..1]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme  $\|\Phi\| = \sup_{t \in [0..1]} |\Phi(t)|$  et la fonctionnelle  $\sigma$  définie sur l'ensemble  $\tilde{\Delta}(0,1)$  constitué des

courbes  $\Phi$  dans  $\tilde{W}(0,1)$  (courbes  $\Phi$  de  $\tilde{V}$  vérifiant  $\Phi(0)=0, \Phi(1)=1$ ) telles que:

- (1)  $(t, \Phi(t)) \in U$  pour tout  $t$  dans  $[0..1]$ ,  $U$  étant un ouvert de  $[0..1] \times \mathbb{R}$
- (2)  $\Phi$  croissante au sens large sur  $[0..1]$

Comme nous l'avons remarqué, cette seconde contrainte ("supplémentaire" de croissance au sens large) implique que  $\tilde{\Delta}(0,1)$  n'est pas nécessairement ouvert. La preuve en est évidente. Intuitivement, sur un intervalle (inclus dans  $[0..1]$ ) où  $\Phi$  est constante (densité  $\varphi$  nulle sur cet intervalle), on prouve facilement qu'un voisinage de  $\Phi$  pour la topologie définie par la norme uniforme sur  $[0..1]$  de  $\tilde{V}$  va contenir des  $\Phi$  décroissantes sur cet intervalle et donc qui ne sont plus des fonctions de répartition.

Dès lors, une condition nécessaire d'existence d'un extremum en  $\Phi_0$  n'est plus  $\sigma'(\Phi_0).u=0$ . L'exemple très simple de la figure VII-30 où  $\sigma$  dépend de deux variables  $x$  et  $y$  et est définie sur l'ensemble  $\{(x,y)/x \geq 0\}$  montre qu'en  $(x_0=0, y_0)$   $\sigma$  admet un maximum avec comme conditions nécessaires :

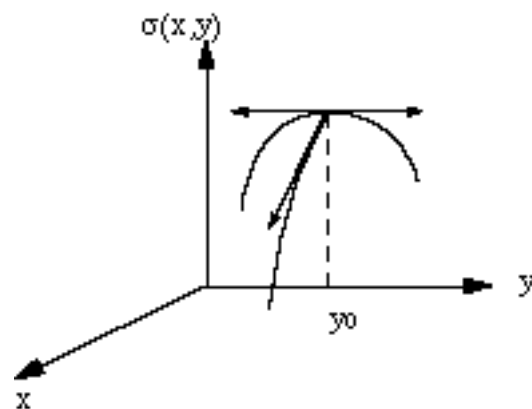
$$\sigma'_x(0, y_0) < 0 \text{ et } \sigma'_y(0, y_0) = 0.$$


Figure VII-30

Le problème qui se pose à nous est analogue, la différence étant que  $\sigma$  ne dépend pas de deux variables mais est définie l'ensemble  $\tilde{\Delta}(0,1)$  défini ci-dessus des

$\Phi$  qui est de dimension infinie.

Une façon de se ramener au cas classique serait de remplacer la condition (2) ci-dessus par :

(2')  $\Phi$  est strictement croissante sur  $[0..1]$ .

On vérifie alors facilement que sous cette condition plus restrictive  $\tilde{\Delta}(0,1)$  est bien un ouvert et que l'on peut alors appliquer les conditions nécessaires d'existence d'un extremum. Ce sont ces développements qui sont formalisés et développés dans la suite. Ils conduisent à une condition d'extremum très simple dans son expression. Nous le résolvons dans un cas particulier

Nous présentons un premier résultat fondé sur les remarques précédentes.

**Notations :**

$\tilde{V}$  : espace de Banach des applications bornées de  $[0..1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme uniforme.

$\tilde{W}(0,1)$  sous espace affine de  $\tilde{V}$  des applications  $\Phi$  telles que  $\Phi(0)=0$  et  $\Phi(1)=1$ .

**Théorème :**

Soit  $\sigma$  la fonctionnelle définie sur  $\tilde{W}(0,1)$  par  $\sigma(\Phi) = \int_0^1 \lambda(t, \Phi) dt$

où  $\lambda(t, \Phi) = -\int_t^1 (\Phi(t) + 1 - \Phi(s))^{k-1} (\alpha(s) + \beta(t)) ds - \frac{k-1}{r_z} [(1 - \Phi(t))\beta(t) + \Phi(t)\alpha(t)]$

avec  $\alpha(t) = \int_t^1 f(t, v) dv$ ,  $\beta(t) = \int_0^t f(u, t) du$

Alors la dérivée  $\sigma'$  est donnée par :

$$\sigma'(\Phi).u = \int_0^1 u(t) \left[ \int_0^t \Lambda(t, s) ds - \int_t^1 \Lambda(s, t) ds \right] dt - \frac{k-1}{r_z} \int_0^1 (\alpha(t) - \beta(t)) u(t) dt$$

avec  $\Lambda(s, t) = (k-1)(\alpha(s) + \beta(t))(\Phi(t) + 1 - \Phi(s))^{k-2}$

où  $u \in \tilde{W}(0,0)$ , ensemble des applications bornées de  $[0..1]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $u(0)=u(1)=0$ .

**Preuve :**

Analogue à celle donnée au § 1.4 du chapitre II "éléments de calcul des variations" de [Ca90]. Non détaillée ici.

**Application à la recherche d'extremum :**

Comme nous l'avons détaillé précédemment, nous recherchons un maximum de  $\sigma$  sur le sous-ensemble  $\tilde{\Delta}(0,1)$  de  $\tilde{W}(0,1)$  des applications  $\Phi$  qui sont croissantes au sens large. Ceci entraîne des conditions complexes sur les dérivées comme rappelé figure VII-30. Nous ne savons pas résoudre ce problème dans le cas général.

Pour le cas de  $k=2$  bandes, nous pouvons (pour certaines scènes "f") exhiber un maximum local. Pour cette valeur de  $k$ , on peut considérer le second terme de  $\sigma$  et de  $\sigma'$  (en  $(k-1)/r_z$ ) négligeable.

La fonction  $\Lambda$  devient indépendante de  $\Phi$  et  $\sigma'$  s'écrit alors :

$$\sigma'(\Phi).u = \int_0^1 u(t) \left[ \int_0^t (\alpha(t) + \beta(s)) ds - \int_t^1 (\alpha(s) + \beta(t)) ds \right] dt$$

$\sigma'$  apparaît "constante", c'est-à-dire indépendante de  $\Phi$ .  $\sigma$  est analogue à une "droite" non horizontale ( $\sigma'(\Phi) \neq 0$ ), et atteint donc ses extrema sur les bords du domaine sur lequel elle est étudiée. Il faut donc s'attendre à trouver le maximum recherché de  $\sigma$  sur le bord de  $\tilde{\Delta}(0,1)$ , c'est-à-dire pour une fonction de répartition  $\Phi_0$  non strictement croissante. On va prouver le résultat suivant :

Proposition pour  $k=2$ , si l'on suppose que la fonction (qui intervient dans l'expression de  $\sigma'(\Phi)$ ) :

$$\delta(t) = \int_0^t (\alpha(t) + \beta(s)) ds - \int_t^1 (\alpha(s) + \beta(t)) ds$$

admet un zéro unique  $t_0$  sur  $[0..1]$ , est négative sur  $[0..t_0[$  et positive sur  $]t_0..1]$ , alors  $\Phi_0(t) = \mathbb{1}_{[t_0..1]}(t)$  fonction de répartition de la mesure de Dirac  $\delta_{t_0}$  est un maximum local de  $\sigma$ .

Dans les exemples suivants, les conditions imposées à  $\delta$  sont satisfaites.

**Exemple 1 :**

Pour une scène équirépartie,  $f \in L^2$  sur  $\Omega$ ,

$$\alpha(t) = 2 - 2t, \quad \beta(t) = 2t$$

$$\text{et } \delta(t) = \int_0^t (2 - 2t + s) ds - \int_t^1 (2 - 2s + 2t) ds = 2t - 1$$

$\delta$  satisfait bien aux conditions demandées avec :

$$t_0 = \frac{1}{2}, \quad \delta(t) \leq 0 \text{ sur } \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \text{ et } \geq 0 \text{ sur } \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$$



**Exemple 2 :**

Pour une scène où les objets sont déportés vers le haut, donnée par la densité  $f(x,y)=132 x^{10}$  qui prend des valeurs fortes pour  $t$  proche de 1, alors

$\delta(t)=-1 + 132 t^{11} - 130 t^{12}$  vérifie les mêmes conditions, avec  $t_0=0,7171$ .

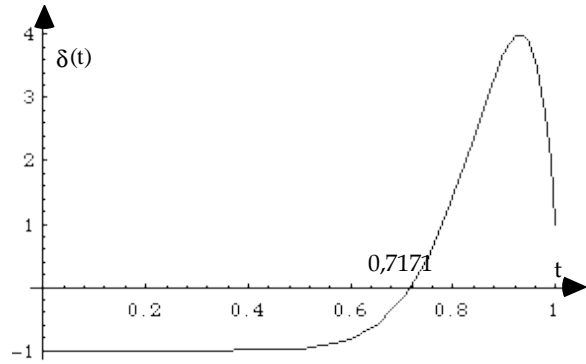


Figure VII-31

**Remarque :**

Prendre  $\delta_{t_0}$  pour loi guidant le choix de la frontière des deux bandes revient à dire que l'on prend cette frontière en  $t_0$ .

**Preuve de la proposition :**

Exprimer que  $\Phi_0$  est un maximum local revient à imposer que pour toute application  $\Phi= \Phi_0 + \varepsilon u$  infinitésimalement proche ( $\varepsilon$  tend vers 0, en étant positif) de  $\Phi_0$  (dans la "direction  $u$ "),  $\sigma(\Phi)$  soit inférieure ou égale à  $\sigma(\Phi_0)$ .

Comme nous l'avons déjà exprimé précédemment,  $\Phi$  étant une fonction de répartition, c'est-à-dire croissante au sens large, la variation infinitésimale  $\varepsilon u$  imposée à  $\Phi_0$  dans la "direction  $u$ " ne peut pas être choisie n'importe comment.

Pour  $\Phi_0$ , fonction de répartition de  $\delta_{t_0}$ , c'est-à-dire  $\Phi_0(t) = \mathbb{1}_{[t_0..1]}(t)$ , on peut très facilement décrire les variations infinitésimales  $\varepsilon u$  autorisées.  $u$  doit être croissante positive ou nulle sur  $[0..t_0]$  et croissante négative ou nulle sur  $[t_0..1]$  [ pour que  $\Phi= \Phi_0 + \varepsilon u$  soit une fonction

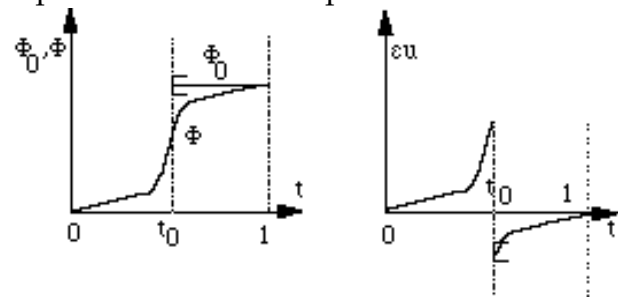


Figure VII-31 :  $\Phi= \Phi_0 + \varepsilon u$ , (avec  $\varepsilon>0$ )

de répartition, comme on le voit sur la Figure VII-31).

On note  $u$  cet ensemble de fonctions  $u$  sur  $[0..1]$ .

$\sigma'(\Phi)$  étant indépendante de  $\Phi$ , on a une "droite" c'est à dire :

$$\sigma(\Phi) = \sigma(\Phi_0) + \varepsilon \sigma'(\Phi_0).u$$

On en déduit que  $\Phi_0$  sera un maximum local si  $\sigma'(\Phi_0).u < 0$  pour toute  $u$  dans  $u$ .

Or :

$$\begin{aligned} \sigma'(\Phi_0).u &= \int_0^1 u(t)\delta(t)dt \\ &= \int_0^{t_0} u(t)\delta(t)dt + \int_{t_0}^1 u(t)\delta(t)dt \end{aligned}$$

Étant donné le choix de  $t_0$  et les propriétés de  $\delta$ , on a sur  $[0..t_0]$ ,  $u(t) \geq 0$  et  $\delta(t) \leq 0$

et sur  $[t_0..1[$ ,  $u(t) \leq 0$  et  $\delta(t) \geq 0$ .

On en déduit donc que  $\sigma'(\Phi_0) \cdot u \leq 0$       CQFD

### III.5) Autres critères à étudier

Nous venons de donner une formule permettant de trouver les extrema du gain dans le cas de notre méthode de lancer de rayon. Cependant, ce critère n'est pas le seul qui soit important. En particulier, dans le cadre du parallélisme où nous sommes, il est aussi important de rechercher un bon équilibrage de la charge des processus. Ceci peut également être exprimé avec notre approche statistique. En effet, rechercher un bon équilibrage de la charge, signifie rechercher un nombre moyen d'intersections par processus qui soit le même pour tous les processus, ou bien encore, cela revient à minimiser l'écart type de  $\eta_p$  de chaque processus par rapport à la valeur moyenne  $E(\eta_p)$  de l'ensemble des processus. Il est donc envisageable de rechercher une formule donnant cet écart type de la même façon que nous avons cherché à établir une formule donnant  $\eta_p$ .

### Conclusion

Ce chapitre sur la recherche d'un modèle statistique permettant d'évaluer les performances des optimisations algorithmiques présentées dans ce mémoire est important car il montre que l'on peut étudier l'efficacité d'un programme de lancer de rayon sans nécessairement avoir recours aux tests numériques sur ordinateur et prévoir, dans notre cas, quel est le nombre optimal de processus vis à vis du pourcentage d'objets économisés lors des tests d'intersection.

De plus, même si nous avons démontré qu'un protocole de tests pertinent pouvait être mis au point, nous serions placés dans une situation idéale d'analyse (indépendance totale vis à vis des machines et des scènes) si celle-ci pouvait être totalement mathématique. Un certain nombre de résultats dans ce sens ont été obtenus :

- modélisation statistique du gain  $\eta_p$  sur une version simplifiée de notre programme,
- validation de ce modèle et comparaison avec la réalité,
- expression générale du comportement de l'espérance  $E(\eta_p)$  en fonction de la scène et du choix des bandes,
- recherche dans des cas simples du meilleur choix des bandes pour une scène donnée.

Cette recherche d'un modèle complètement mathématique a conduit à

introduire des outils mathématiques classiques tels que les statistiques d'ordre et le calcul de variations selon des hypothèses non classiques. Cette démarche est nouvelle en infographie.

Nous pensons avoir montré l'intérêt et la faisabilité d'une telle approche même si elle demande encore à être approfondie en de nombreux points (rayons secondaires et d'ombrage, cas plus généraux, etc...). Comme nous l'avons montré sur le cas simplifié des topologies bandes et carrées, il est possible d'estimer théoriquement la valeur des différentes méthodes d'optimisation sans avoir à implanter nécessairement l'algorithme. Cependant, il reste encore un travail long et complexe à effectuer pour pouvoir évaluer toutes les optimisations d'un lancer de rayon donné.

### **Bibliographie**

- [BBN92] : BARRY (C. A.), BALAKRISHNAN (N.), NAGARAJA (H.N.). - "A first course in order statistics". J. Wiley & Sons, INC, New-York, 1992, 279 pages.
- [Ca90] : CARTAN (H.). - "Cours de calcul différentiel". Hermann, Paris, 1990, 356 pages.
- [GS87] : GOLDSMITH (J.), SALMON (J.). - "Automatic creation of object hierarchies for ray tracing". IEEE Computer Graphics Application, 7(5), May 1987, p. 14-20.

## ANNEXE DU CHAPITRE VII

*Compléments des calculs du modèle théorique***I) Pourcentage d'objets non testés en partition carrée**

Comme pour les bandes, on peut établir la formule de  $O_p$  puis de  $\eta_p$  dans le cas de l'indépendance du choix des dimensions de l'objet considéré :

$$\begin{aligned} \frac{O_p}{N} &= \frac{I_p}{NP_1} = \left( \frac{m}{r_z} + \frac{n}{r_x} - \frac{mn}{r_x r_z} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left( \alpha_{i+1} - \alpha_i - \frac{1}{r_x} \right) \left( \beta_{j+1} - \beta_j - \frac{1}{r_z} \right) i_{1T}(i,j) i_{2T}(i,j) \\ &= \left( \frac{m}{r_z} + \frac{n}{r_x} - \frac{mn}{r_x r_z} \right) + \lambda \end{aligned}$$

avec  $i_{1T} = 1 - i_{z1}$ ,  $i_{2T} = 1 - i_{z2}$

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left( \alpha_{i+1} - \alpha_i - \frac{1}{r_x} \right) \left( \beta_{j+1} - \beta_j - \frac{1}{r_z} \right) (1 - i_{z1})(1 - i_{z2}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( \alpha_{i+1} - \alpha_i - \frac{1}{r_x} \right) \sum_{j=0}^{m-1} \left( \beta_{j+1} - \beta_j - \frac{1}{r_z} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left( \alpha_{i+1} - \alpha_i - \frac{1}{r_x} \right) \left( \beta_{j+1} - \beta_j - \frac{1}{r_z} \right) (1 - i_{1T} i_{2T}) \\ &= \left( 1 - \frac{n}{r_x} \right) \left( 1 - \frac{m}{r_z} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left( \alpha_{i+1} - \alpha_i - \frac{1}{r_x} \right) \left( \beta_{j+1} - \beta_j - \frac{1}{r_z} \right) (1 - i_{1T} i_{2T}) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\begin{aligned} \frac{O_p}{N} &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left( \alpha_{i+1} - \alpha_i - \frac{1}{r_x} \right) \left( \beta_{j+1} - \beta_j - \frac{1}{r_z} \right) (1 - i_{1T} i_{2T}) \\ \eta_p &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left( \alpha_{i+1} - \alpha_i - \frac{1}{r_x} \right) \left( \beta_{j+1} - \beta_j - \frac{1}{r_z} \right) (1 - i_{1T} i_{2T}) \end{aligned}$$